RAE No 001

TITULO
Propuesta didáctica para la comprensión de las transformaciones entre sistemas de representación de funciones, en estudiantes de media fortalecida del colegio Rufino José cuervo IED
AUTORES
Claudia Yamile Ocampo Buitrago, Cristian Javier Rincón Herrera y Luis Rene Villamizar Peñuela
FECHA
Abril 30 de 2018
PROGRAMA ACADEMICO
Maestría en educación con énfasis en docencia universitaria
PALABRAS CLAVES
Enfoque ontosemiótico, Sistemas de representación, Pensamiento matemático, Lenguaje natural, Algebraico, Tabular, Gráfico, Faceta Epistémica, Faceta Semiótica, Instrucción matemática
DESCRIPCIÓN
La presente investigación es una propuesta didáctica que pretende aproximar al docente a una estructura que propenderá por la comprensión y aprendizaje de los sistemas de representación de funciones, desde un enfoque ontosemiótico (EOS)

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las nuevas tecnologías, la cantidad de información y la velocidad con que se deben tomar decisiones, son apenas algunos de los retos cognitivos que se enfrentan en la vida diaria, obligando a las personas a adquirir nuevas competencias que les permitan asimilar este ritmo para comprender el mundo y actuar en concordancia con sus necesidades sociales, económicas y políticas. Situación que se fortalece desde las matemáticas, que como ciencia deductiva, lógica y formal, utiliza un lenguaje simbólico estructurado, carente de ambigüedades, que permite usar representaciones adecuadas para interpretar, explicar y comunicarse de manera racional, tanto interna como externamente; lo que obliga a generar las estrategias didácticas acordes con estas necesidades del ser humano. Adicionalmente a lo anterior la eficiencia de los procesos requiere que las personas involucren en su razonamiento una estructura lógica que permita representar, caracterizar, comparar, analizar y utilizar, diferentes tipos de información a través de diferentes sistemas de representación. La matemática ofrece una serie de herramientas teóricas como los esquemas, gráficos, tablas y sistemas algebraicos, que permite la construcción de conceptos y teorías por medio de un lenguaje científico que explica las experiencias.

Gracias a la amplia utilización de diferentes sistemas de notación simbólica (números, letras, tablas, gráficos, etc.,), las matemáticas son útiles para representar de forma precisa informaciones de naturaleza muy diversa, poniendo de relieve algunos aspectos y relaciones no directamente observables y permitiendo anticipar y predecir hechos situaciones o resultados que todavía no se han producido. (Godino D., 2004).

JUSTIFICACIÓN

Los diferentes referentes descritos en la investigación permiten ver la importancia del tema en un contexto educativo global, nacional y local, así como acercarse apropiadamente a la problemática que se aprecia en el colegio Rufino José Cuervo IED, en la que durante los años 2015 y 2016 el índice final de reprobación fue del 40.8 % y 32.14% respectivamente, de estos la gran mayoría presentaba pérdida de la asignatura de matemáticas. Sumado a esto el informe de las pruebas saber 3°, 5° y 9°enviado por el MEN a la institución, recomienda trabajar en los “aprendizajes por mejorar” desde las tres competencias evaluadas, debido a las dificultades evidenciadas. Los aprendizajes a mejorar se encuentran distribuidos en los cinco pensamientos matemáticos, específicamente del pensamiento variacional, ya que los estudiantes no hacen uso de funciones para modelar situaciones de variación, no reconocen el lenguaje algebraico como forma de representación de procesos, no identifican características de gráficas cartesianas relacionadas con una situación y no interpretan tendencias asociadas a situaciones de variación. Realidad que se confirma en el diagnóstico que evidencia la necesidad de intervenir positivamente en el proceso educativo de la población, en busca de favorecer los resultados académicos y más allá de ellos, su vida laboral, dada la rapidez con que se desarrollan los eventos día a día, la cantidad de información que se debe manejar y conocer para tomar una decisión o solucionar un problema, entendiendo este como “una situación que requiere el manejo apropiado, oportuno y eficaz de los recursos o información en función de un objetivo, bien sea social, económico o teórico”. Así pues, se hace necesario que el individuo esté en capacidad de construir herramientas que le permitan reducir la incertidumbre en la toma de decisiones acertadas en el menor tiempo y que impacten con mayor eficiencia y eficacia.

PROBLEMA

¿Cómo fortalecer la comprensión de las transformaciones entre los sistemas de representación de las funciones, en estudiantes de las modalidades de Redes y Electricidad de ciclo 5 del IED Colegio Rufino José Cuervo?

OBJETIVO GENERAL

Determinar los componentes de una propuesta didáctica orientada al fortalecimiento de la comprensión de las transformaciones entre los sistemas de representación de las funciones, en los estudiantes de media fortalecida de las modalidades de redes y electricidad del IED Colegio Rufino José Cuervo

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para dar cumplimiento a este objetivo general y resolver la pregunta científica se han definido las siguientes **tareas de Investigación**:

- Adelantar la revisión documental sobre el objeto de estudio y categorías teóricas que permiten comprender el fenómeno a examinar.
- Construir una propuesta didáctica orientada al fortalecimiento de la comprensión de las transformaciones entre los sistemas de representación de las funciones.
- Evaluar el proceso de implementación de la propuesta didáctica aplicada a los estudiantes de media fortalecida de las modalidades de redes y electricidad del IED Colegio Rufino José Cuervo.

MARCO TEÓRICO

Para esta investigación se hace referencia a las didácticas específicas en particular la didáctica de las matemáticas, asumida como uno de los aspectos fundamentales, este trabajo se centra en el Enfoque Ontosemiótico propuesto por Godino y puesto que, como lo indican Chevallard (1991), Duval (1993, 1995), Godino y Batanero (1994) “en matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas”, se tratan los sistemas de representación para analizar diversas transformaciones que se pueden presentar desde la teoría de las funciones semióticas de Duval, todo esto bajo la premisa “sin semiosis no puede existir la noesis” (Duval), la cual indica que la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar los registros de representaciones semióticas de tales conceptos. De esta manera, el aprendizaje se produce cuando se comprenden los sistemas de representación de un objeto, es decir que entre más transformaciones realice un sujeto en los sistemas de representación, en este caso de la función, más se acerca a la comprensión del mismo. Por su parte el EOS pretende describir las interacciones que suceden en el aula de matemáticas mediante la consolidación de las ideas sobre los significados institucionales y personales, la idea de función semiótica y la ontología matemática introducidas en Godino y Recio (1998); considerando la utilidad de las nociones de patrón de interacción, negociación de significados, norma sociomatemática, planteadas por el interaccionismo simbólico (Cobb y Bauersfeld, 1995; Godino y Llinares, 2000) citados por Godino (2012).

MARCO LEGAL

Para esta investigación se tiene en cuenta la normatividad sobre currículos para la formación en matemáticas que contempla diversos decretos y resoluciones sobre la educación matemática, las normas que regulan la evaluación y la formación docente, sin dejar de lado las leyes 30 y 115 así como los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencia y demás desarrollos pedagógicos y didácticos que el proyecto educativo nacional, regional e institucional requieran.

METODOLOGÍA

La presente investigación se adelanta mediante un diseño basado en la investigación acción, en los términos que propone Elliot (2000). Así mismo se enmarca dentro de un enfoque cualitativo según lo indicado por Vasilachis de Gialdino (2009), se fundamenta en el paradigma Sociocrítico. Con un alcance descriptivo Sampieri (2016), con un método teórico comparativo y empírico que va desde la observación y la medición hasta la experiencia de campo, propendiendo por la creación de espacios que permitan a los estudiantes reflexionar sobre la comprensión, en este caso de un objeto matemático. Para la recolección de información se utilizaron instrumentos como un cuestionario con elementos y escala tipo Likert, revisión documental de las actas de comisión de evaluación y promoción, malla curricular de matemáticas y del reporte de resultados de la institución en pruebas saber 9°. Los resultados obtenidos durante la implementación de la propuesta se estudiarán por medio del análisis documental.

RESULTADOS

Sistema de representación de lenguaje natural: Se fortalecieron la fonología, morfología; los estudiantes hacen una buena lectura de los símbolos implementando reglas gramaticales del idioma la interpretación de la información explicita e implícita, lo que permite convertir del lenguaje natural al lenguaje algebraico, gráfico o tabular de una forma directa.

El avance en el sistema de representación gráfico fue muy significativo, mejorando aspectos como el reconocimiento de los elementos de la gráfica (ejes, rótulos, segmentos, curvas), manejo de escalas en la cual completa las escalas en los ejes coordenados; ubicación de puntos en el plano y la interpretación de la información.

En cuanto al sistema de representación algebraico se encuentra que uno de los problemas con más frecuencia es que los estudiantes no reconocen los símbolos (variables, operadores, relaciones de orden o equivalencia, signos de agrupación); operaciones (suma, multiplicación y las que de estos se derivan).

Con respecto al sistema de representación tabular fue el de mayor impacto pasó de tener niveles en 0 a una distribución continua con sesgo a izquierda, lo cual pone al grupo con estudiantes en todos los niveles, y a más de 72% en los niveles 4 y 5; generando habilidades que les ayudan a realizar conversiones de tablas en gráficos y ecuaciones.

CONCLUSIONES

Como fruto de esta propuesta se desarrollaron dos instrumentos que permiten categorizar cada uno de los sistemas de representación semiótica de la función, los niveles de comprensión, a través de dos matrices categoriales en las cuales se expresan de forma clara, las manifestaciones que permiten identificar el nivel de comprensión de los estudiantes en cuanto al tratamiento en cada sistema de representación; la segunda permite identificar las conversiones, su nominación según Janvier (1978) y los niveles de comprensión en cada una de acuerdo con Duval (2004) y Kieran (2008).

Ubicar a cada individuo en un nivel específico de comprensión, tanto en el tratamiento como en la conversión, muestra las fortalezas y debilidades en las que se debe trabajar para avanzar en la adquisición del concepto función. Siendo este el aporte científico dado en esta investigación. Con estos instrumentos el docente de matemáticas puede tomar la propuesta didáctica de este trabajo o elaborar una propia, adaptándola a las necesidades particulares de su contexto.

La propuesta permite un significativo progreso en relación con la comprensión en el tratamiento y la conversión de los 4 sistemas de representación de la presente investigación.

En cuanto al lenguaje natural se favoreció notablemente el tratamiento y la conversión, dado que muestra avances en interpretar la información usando reglas gramaticales, paráfrasis, reconociendo objetor y sus propiedades, entre otros. Se reconoce la necesidad de trabajar en clase de matemáticas en el desarrollo de competencias del lenguaje como son: lectura comprensiva, escritura, oralidad y escucha, pues el buen uso del lenguaje natural deja de ser un obstáculo para transformarse en aporte al desarrollo de las conversiones en todos los sistemas de representación y la comprensión no solo matemática sino del entorno.

RECOMENDACIONES

Se sugiere implementar la propuesta didáctica elaborada en el presente trabajo, la cual se encuentra en el apéndice D, emplea actividades que le permiten al estudiante reconocer las unidades significantes que se emplean en cada sistema de representación; además que invitan al estudiante a realizar una correcta interpretación de cada situación .planteada desde cada sistema de representación; por otra parte las actividades permiten al estudiante reconocer los criterios de correspondencia semántica y las relaciones presentes tanto entre los sistemas de representación, como al interior de cada uno de ellos.

Se recomienda que, al momento que de enseñar cualquier lenguaje ya sea natural, matemático, se haga énfasis en las propiedades y relaciones entre los símbolos que los caracterizan, sus diferentes formas de representación mostrando de cada uno sus alcances, limitaciones y aplicaciones.

En lo que concierne al sistema algebraico es necesario generar un instrumento que categorice el uso de la variable y sus diferentes interpretaciones, realizar actividades que fortalezcan la transición aritmética algebra, el sistema algebraico depende de la comprensión de la variable.

BIBLIOGRAFÍA

Estándares Básicos de Compentecias. (2006). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de MIniterio de educacion nacional: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf Godino D., J. B. (Octubre de 2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros.* Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de Proyecto Edumat-Maestros: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como. *perspectiva de la didáctica de las matemáticas como.* *Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas.* (7 de Junio de 1998). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de ministerio de eduacion nacional: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf
CAMPO DE INVESTIGACION EDUCATIVO: Pedagogía, Didáctica, Metodología

Propuesta didáctica para la comprensión de las transformaciones entre sistemas de representación de funciones, en estudiantes de media fortalecida del colegio Rufino José cuervo IED

Claudia Yamile Ocampo Buitrago, Cristian Javier Rincón Herrera y Luis Rene Villamizar Peñuela

Universidad Libre

Director: MG. Edgar Hernán Ávila Gil

Notas del autor

Claudia Yamile Ocampo Buitrago, Cristian Javier Rincón Herrera y Luis Rene Villamizar Peñuela, Maestría en Educación, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Libre

La correspondencia relacionada con este trabajo de grado debe ser dirigida a Edgar Hernán Ávila Gil, Universidad Libre Sede Bogotá, Avenida 70 # 53 – 40

Contacto: edgar.avila@unilibre.edu.co

2018

Agradecimientos

¡Gracias señor!

Gracias Señor por guiarme a la misión de educar y permitirme ser fuente de esperanza en la vida de mis estudiantes.
Gracias a Diana, mi gran esposa, quien sin saberlo se ha convertido en mi fuerza y mi valor.
Gracias a nuestros hijos María Alejandra y Cristian David, manifestación del amor y la confianza que Dios me tiene.

Cristian Rincón.

Agradezco a Dios, quien espero ilumine todos y cada uno de mis pasos.
A mi amada hija, motor que me impulsa en los momentos difíciles.
A mi madre, quien me ofrece una palabra de ánimo cuando pienso desistir.
A mis compañeros Cristian y René, por su apoyo incondicional.
Gracias porque sin todos ustedes no habría sido posible escalar este nuevo peldaño en mi vida.
Claudia Ocampo.

En memoria de mi madre.
Agradezco a mi amada esposa compañera de aventuras, cómplice de locuras, fuente de fortaleza y motivación en este paso tan importante.
A mis hermanos quienes siempre me han acompañado en cada paso que he dado.
También agradezco a Dios.

Luis René Villamizar

Colectivamente agradecemos con admiración a nuestro director MG. Edgar Ávila, quien desde sus tareas iniciales nos condujo sin que lo supiéramos a la comprensión y realización del presente trabajo.
¡Mil gracias!

Tabla de contenido

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Índice de imágenes

Índice de apéndices

Introducción

El desarrollo de las nuevas tecnologías, la cantidad de información y la velocidad con que se deben tomar decisiones, son apenas algunos de los retos cognitivos que se enfrentan en la vida diaria, obligando a las personas a adquirir nuevas competencias que les permitan asimilar este ritmo para comprender el mundo y actuar en concordancia con sus necesidades sociales, económicas y políticas. Estos desarrollos son impulsados por la ***matemática*** que, con su estructura lógica, orden, relaciones y procesos facilita a los sujetos tal labor. A este respecto Castro de Bustamante (2007) afirma que:

> En respuesta a las permanentes y crecientes demandas de un mundo cada vez más dependiente de la tecnología y, por ello mismo, de la propia matemática, la formación general básica en esta área debe contribuir en la capacitación del hombre para asumir y enfrentar los retos que el día a día le impone. Así, como forma de aproximación a esa realidad, (Castro de Bustamante, 2007).

Dado que la matemática, como ciencia deductiva, lógica y formal, utiliza un lenguaje simbólico estructurado, carente de ambigüedades, que desde sus diferentes ramas permite usar representaciones adecuadas para interpretar, explicar y comunicarse de manera racional, tanto interna como externamente; está obligada a generar las estrategias didácticas acordes con estas necesidades del ser humano.

Un aspecto adicional es la eficiencia de los procesos, para ello se requiere que las personas involucren en su razonamiento una estructura lógica que permita representar, caracterizar, comparar, analizar y utilizar, diferentes tipos de información a través de diferentes sistemas de representación. La matemática ofrece una serie de herramientas teóricas como los esquemas, gráficos, tablas y sistemas algebraicos, que permite la construcción de conceptos y teorías por medio de un lenguaje científico que explica las experiencias.

> Gracias a la amplia utilización de diferentes sistemas de notación simbólica (números, letras, tablas, gráficos, etc.,), las matemáticas son útiles para representar de forma precisa informaciones de naturaleza muy diversa, poniendo de relieve algunos aspectos y relaciones no directamente observables y permitiendo anticipar y predecir hechos situaciones o resultados que todavía no se han producido. (Godino D., 2004).

En consecuencia, es posible afirmar que entre más concreto y claro sea un lenguaje es posible expandirlo y emplearlo en la representación de los fenómenos cotidianos y de los procedimientos enfocados al desarrollo del pensamiento desde diferentes perspectivas según se requiera. Esto es posible siempre que dentro del transcurso del aprendizaje se incluyan procesos que fortalezcan habilidades mentales y aporten a la comprensión del significado de un concepto, de manera que acojan las inquietudes que típicamente los estudiantes exponen, tal como lo afirma Zúñiga:

> El concepto de función, está presente de manera muy natural e intuitiva, y a pesar de ello, nuestros alumnos preguntan: ¿Qué tienen que ver las matemáticas con la vida real? Más aún, y de manera muy particular ¿cómo puede suceder eso, si se ha dicho que función, es un concepto muy complejo? Pero, así es, hemos de decir que en el lenguaje de nuestra vida cotidiana, intuitivamente correspondiendo a una idea,

está presente el concepto de función: por ejemplo al referirnos a los impuestos que pagan las personas, estos están en función de los ingresos, los resultados obtenidos en los exámenes, son en función del tiempo dedicado a estudiar. (Zuñiga, 2009)

De esta manera el autor está mostrando que las relaciones susceptibles de establecer entre una o más variables, constituyen el punto de partida para el concepto ***función***.

El estudio de los procesos de aprendizaje en relación con las funciones y la comprensión de las transformaciones entre los sus sistemas de representación ha sido interés de diversos autores, como se verá a continuación.

Balaguera (2000, en su trabajo indica que se observan problemas de aprendizaje en interpretación y análisis de esquemas, planos, gráficas, montajes, medidas eléctricas, cálculos y fenómenos eléctricos, temas desarrollados en el proceso de construcción de conocimientos de la electricidad y la electrónica, en los alumnos del área de tecnología (electricidad - electrónica), -pertenecientes a grados octavo, noveno, décimo y once, del Colegio distrital República de Costa Rica, jornada tarde. El autor afirma que estos temas requieren no sólo de una preparación técnica, que puede ser aportado la práctica, sino que la raíz del problema de conceptualización está en la baja o nula formación de las estructuras físico – matemáticas, suficientes y necesarias, que representan el valor agregado de la lógica y el análisis, básicos en el aprendizaje para la construcción de los conocimientos técnicos y tecnológicos, mostrando así la importancia del desarrollo del pensamiento matemático, ya que afecta, no solo de manera inmediata la formación básica y media vocacional, sino que repercute en la formación superior generando dificultades que demoran los procesos formativos.

De otra parte, García Rodríguez y Benítez Pérez indican en su trabajo “Nuevos ambientes de aprendizaje de las matemáticas apoyados en las TIC: El uso de MOODLE y Multimedia”, la importancia del desarrollo de las competencias matemáticas a partir del análisis de los datos identificando dos tipos de razonamiento. Cada uno de los tipos de razonamiento estudiados está relacionado con las representaciones empleadas: a) razonamiento relacionado con la representación verbal y, b) razonamiento relacionado con la representación gráfica y verbal. El segundo correspondiente a un pensamiento más complejo, evidenciado en las relaciones que establecen los estudiantes entre las variables del problema. (García Rodríguez)

Complementariamente Pacheco (2008) en su propuesta “Jugando para desarrollar el pensamiento lógico matemático” refiere que diariamente, en nuestro quehacer pedagógico, observamos como los estudiantes presentan algunas dificultades para desarrollar en forma adecuada su proceso de aprendizaje, y en este sentido el desarrollo del pensamiento lógico matemático se muestra como una alternativa en la construcción del conocimiento que el maestro quiere compartir con él, dentro del aula de clase.

Desde 1998 Vasco, en su conferencia “Un panorama de la investigación en educación matemática en Colombia” advierte que la investigación referente a la educación matemática en Colombia es muy incipiente (situación que ha cambiado, una muestra este trabajo en especial), si se compara con los Estados Unidos o con España, señalando que Desde 1998 Vasco, en su conferencia “Un panorama de la investigación en educación matemática en Colombia” advierte que la investigación referente a la educación matemática en Colombia es muy incipiente, en especial si se compara con los Estados Unidos o con España, mostrando la necesidad de incursionar en esta, realizando trabajos como el presente. En la conferencia Vasco señala que:

> Más que en publicaciones, que desafortunadamente apenas existen, me baso ante todo en mi conocimiento de casi todos los grupos y personas que han iniciado este difícil camino de la investigación en educación matemática. Pienso principalmente en los encuentros de la incipiente red de investigadores en esta área en la Universidad Javeriana en septiembre de 1990 en Bogotá, y en la Universidad del Cauca en noviembre de 1991 en Popayán. Se tuvieron también algunas reuniones de investigación en aritmética en la Universidad Externado de Colombia, y en geometría en la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, además de un encuentro regional de matemáticas para el Occidente colombiano, que se realizó en la Universidad del Valle del 20 al 24 de abril de 1992 en Cali. (Vasco, 1998)

Aunque Fiallo (2015) considera que el proyecto "Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia", apoyado y ejecutado por el Ministerio de Educación Nacional, "llevó a la consolidación de grupos de investigación en educación matemática en las universidades, dedicados a estudiar los elementos teóricos y metodológicos de la incorporación de las tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas". (Fiallo Leal, 2015). De esta manera se aprecia un avance, aunque limitado en relación con el estudio de los intereses didácticos, pedagógicos y tecnológicos de las matemáticas, dentro de los cuales se encuentra el enunciado para esta investigación.

En apoyo a este interés se presenta el estudio adelantado por Wilson Gómez Bello, el cual incluye un recorrido histórico partiendo desde el año 2000 a.C. hasta el siglo XIX. En este análisis muestra los orígenes, aportes, dificultades y desarrollo tanto de la función como de sus diferentes sistemas de representación. Continúa mostrando los obstáculos históricos en el desarrollo teórico de las funciones y su similitud con las tendencias erróneas que presentan los estudiantes actualmente, basándose principalmente en investigaciones de Anna Sierpinska. A decir del autor, estos errores se hacen evidentes cuando:

> Relacionan la función como un objeto geométrico y le dan la característica de este objeto, la identifican con su ecuación; es para ellos un ente abstracto representado en un sistema coordenado, se reduce a un tipo especial de relación; las variables tiene sentido en las ciencias naturales y en los problemas de aplicación pero no en la matemática, magnitud y número son objetos diferentes y las propiedades de las operaciones numéricas son válidas para operar expresiones algebraicas (Gómez, 2011).

Por su parte dentro de los estudios adelantados por Luisa Ruiz Higueras se "propone siete categorías de las definiciones del concepto de función asociadas a diferentes momentos de su desarrollo: variación, proporción, gráfica, curva, expresión analítica, correspondencia y terna". (Gómez, 2011).

En este sentido se puede considerar que la representación de un fenómeno a través de una función, agiliza su entendimiento y brinda herramientas sencillas para contextualizar un hecho o procedimiento que se busca organizar y entender de forma más completa. De allí que las diferentes ideas de función atienden a diversos tipos y niveles de comprensión en el individuo, acentuando la importancia de atender a las aplicaciones matemáticas, sobre las cuales Godino expresa:

> Las aplicaciones matemáticas tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Si queremos que el alumno valore su papel, es importante que los ejemplos y situaciones que mostramos en la clase hagan ver, de la forma más completa posible, el amplio campo de fenómenos que las matemáticas permiten organizar. (Godino D., 2004).

En este sentido se orienta el trabajo realizado en torno a la función lineal, por parte de Angulo y Celorio (2012), quienes afirman que "el concepto función surge como necesario para modelar y organizar fenómenos o situaciones de variación, razón de cambio y dependencia, entre otros" (Angulo & Celorio, 2012). Los autores muestran la importancia de los sistemas de representación como formas de presentar e interpretar una información o un objeto y por tanto necesarias en el desarrollo del concepto *función*. "El conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de articular sin contradicciones diferentes representaciones del mismo, así como recurrir a ellas en forma espontánea durante la resolución de problemas." (Zuñiga, 2009).

Sobre el particular Riveros y Rojas, al comentar "algunas observaciones de la intervención de los tipos de representación en la enseñanza y aprendizaje de la función lineal", manifiestan la intención de aportar elementos matemáticos y didácticas, que ayuden a fundamentar nuevas propuestas para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal y el abordaje que se hace de las representaciones, dado que consideran que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático es indispensable tener en cuenta dos aspectos:

1. La comprensión de que un objeto matemático tiene diferentes representaciones que demuestran características específicas de él.
2. Las diversas representaciones son equivalentes entre si y se puede transitar pasar de unas a otras lo que permite obtener la comprensión del objeto matemático como tal. (Riveros & Rojas, 2012)

Estos aspectos resultan muy necesarios en el contexto escolar, puesto que en ocasiones el aprendizaje se hace por medio de registros de representación, estudiados dentro del aula de manera independiente.

Ruiz (1998) citado por (Riveros & Rojas, 2012, pág. 245) evidencia este tipo de debilidades señalando que "existe inconsistencia en el reconocimiento de una misma función (por ejemplo, la constante, o la circunferencia) en forma gráfica y algebraica". Tampoco se utiliza un contexto adecuado para tratar este tipo de nociones, lo que dificulta el tránsito de registros, teniendo en cuenta las características que contiene cada uno; esto genera un bajo interés por parte de los estudiantes y obstaculiza el aprendizaje adecuado de la noción de función.

En la propuesta "Implementación de una secuencia de enseñanza para propiciar la comprensión de la función lineal y cuadrática" (Ramírez, 2012), el autor hace una descripción de las dificultades que tienen los estudiantes para comprender tanto las funciones como sus sistemas de representación. Para la investigación se hace uso de los sistemas de representación de la siguiente manera:

> (1) la descripción verbal, utiliza el lenguaje común para dar una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional, (2) la tabla de

valores, la cual da una visión cuantitativa, fácilmente interpretable desde la óptica de una correspondencia, (3) la gráfica de una función, permite definir la función dando una visión geométrica de ella, y (4) la fórmula o expresión algebraica, permite obtener una visión general y completa de la función estudiada, tanto cualitativa como cuantitativa. (Ramírez, 2012).

Las investigaciones realizadas alrededor de la educación y en especial de la educación matemática en Colombia, han dado paso a un sin número de interrogantes que pretenden evaluar y analizar qué tan útiles son las herramientas brindadas por los docentes en el aula de clases, en cuanto a la capacidad de resolver problemas propios de los diferentes aspectos del desarrollo cognitivo, social y cultural de los estudiantes; con el fin de dilucidar la manera en que el papel del docente pueda ser más efectivo y pueda contribuir al desarrollo del pensamiento matemático como instrumento mejorador de los procesos de enseñanza.

En consecuencia, es necesario, por parte de los docentes, emprender procesos investigativos conducentes a generación de propuestas que faciliten la apropiación de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes de todos los niveles. A este respecto Fals Borda (2002) en su artículo titulado "Tensiones en la investigación y cambios de paradigmas: intercambio con matemáticos" (Fals Borda, 2002, págs. 46,191,198) muestra la investigación acción participativa, como camino de unión, dada la dualidad entre la teoría del saber científico, en especial el matemático y la práctica. Cita a Edmund Husserl para mostrar la necesidad de trabajar en contextos reales como vía a la gestación de la matemática real, "detrás de todo número hay un ser humano que respira y siente". (Fals Borda, 2002, pág. 191 a 198) Complementariamente el autor afirma que "en el campo, esta metodología se ha revelado útil para combinar el conocimiento académico con el conocimiento popular, esfuerzo que ha producido beneficios tanto para el uno como para el otro.” (Fals Borda, 2002). Coloca un énfasis importante en la igualdad de roles de los participantes y al contexto social en el que se desarrollan, de tal “En esta forma las cantidades y las unidades, las secuencias y las pautas adquieren un significado real en conexión con el medio al que están ligadas.” (Fals Borda, 2002).

El Gobierno Nacional, por iniciativa del Ministerio de Educación, declaró el 2006 para el sector educativo en Colombia como el *Año de las Competencias Matemáticas*, con el fin de propiciar una amplia reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas, animar diferentes actividades en torno al tema e identificar, socializar y promover experiencias significativas que converjan en mejorar las formas de enseñanza y las competencias de los estudiantes en matemáticas, ”El ser letrado en matemáticas resulta tan importante como el leer y escribir pues, las tendencias actuales nos muestran que en buena parte de las profesiones y ocupaciones hay un manejo constante de tecnologías.” (MEN, 2006)

Posteriormente en el año 2014, el MEN propone el Foro Educativo Nacional "Formar ciudadanos matemáticamente competentes" en el cual se reconoce que el aprendizaje y la enseñanza bajo el enfoque de competencias, requiere de condiciones institucionales y del compromiso por parte de los distintos actores educativos involucrados. Los tres ejes temáticos tratados fueron: ambientes de aprendizaje, la evaluación en matemáticas y la formación de agentes educativos, compatibles con la formación por competencias.

En línea con los intereses formativos del MEN, desde los lineamientos y estándares curriculares se proponen:

- Los cinco procesos generales de la actividad matemática
- Los conocimientos básicos (cinco tipos de pensamiento matemático).
- Los contextos que dan sentido a la actividad matemática escolar, haciendo necesaria la implementación de propuestas y estrategias que propendan por el desarrollo de los pensamientos matemáticos como uno de los ejes fundamentales del aprendizaje. (MEN, 2014)

En el reciente estudio, denominado "Análisis del estado del desarrollo de las competencias de los estudiantes del grado noveno en el área de matemáticas del Colegio Distrital Ciudadela Educativa de Bosa" (Caucali, 2016) se expone y analiza el nivel de desarrollo de las competencias en el área de matemáticas, para así poder mejorar en dicha área. Realiza una relación entre los lineamientos de competencias para matemáticas que muestra el MEN y lo que solicita el ICFES para la evaluación de las pruebas saber grado 9º.

Por su parte Bohórquez, Rivera y García en su propuesta "Competencia matemática Pensar y Razonar: un estudio con la media aritmética", plantean la importancia de la competencia matemática pensar y razonar y, con fundamento en ellas, desarrollar su utilidad y aplicabilidad didáctica en el proceso complejo y prolongado de desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, a partir del aprendizaje del objeto matemático media aritmética. Es decir, se trata de aportar elementos teóricos y metodológicos, para que los profesores de matemáticas puedan, en mejores condiciones, contribuir a movilizar las competencias matemáticas del estudiante. (Rivera & Bohórquez, 2014)

Henao Ceballos, Marín Franco, Montoya Escobar y otros presentan, en su propuesta "Razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado", un avance de la investigación cualitativa en la cual se busca identificar las características de razonamiento presentes en estudiantes de grado quinto al momento de enfrentarse a situaciones de tipo variacional; dichas características se discuten a la luz del marco conceptual para la covariación propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2003). Desde las situaciones, se desprenden algunas implicaciones y recomendaciones para su implementación en el aula de clase, específicamente para un acercamiento a nociones como: función y tasa de variación, las cuales se encuentran en las bases propias del razonamiento covariacional y pueden abordarse desde los primeros grados de escolaridad, como una manera de crear cimientos en la comprensión de los conceptos más relevantes del cálculo. (Henao & Otros, 2013)

Por otra parte, Caicedo Parra, Pulido, Correa y otros, en su experiencia "Juegos de rol como mediación educativa para el desarrollo del lenguaje y pensamiento matemático" indican que la experiencia educativa, en niños vulnerados en sus derechos fundamentales, exige al profesor de matemáticas reflexionar sobre el papel del juego en el aprendizaje y la construcción de la zona de desarrollo próximo. En este punto, son importantes los ambientes lúdicos con miras a la construcción de mundos posibles por parte de los niños, desarrollando en ellos la imaginación a partir de elementos de la fantasía, entre la ficción y la realidad. Para esto se propone la implementación de los juegos de rol como una mediación educativa para el desarrollo del lenguaje y pensamiento matemático en los niños que asisten a la Fundación Asociación Apoyemos, de la comunidad del Mochuelo, los cuales se encuentran en condiciones de vulnerabilidad, de tal manera que se genere un desarrollo pleno como sujetos de conocimiento y afectividad. (Caicedo & Otros, 2013)

Londoño Acevedo y Aldana Bermúdez buscan, en su experiencia titulada "Desarrollo de competencias matemáticas en torno al concepto de función lineal", el desarrollo de competencias en el pensamiento variacional, desde el concepto de función lineal. La investigación tiene como base la teoría de “Las Situaciones Didácticas” de Brousseau. Para ello se ha utilizado, como metodología, una ingeniería didáctica a un grupo de veinticinco estudiantes de grado noveno, a quienes se les aplicó un cuestionario y una entrevista. A partir del análisis y de los resultados se muestran algunas dificultades que los estudiantes ponen de manifiesto, así como el logro de algunas competencias como pensar y razonar, plantear y resolver problemas y representar. (Londoño & Aldana, 2013)

En relación con la formación de profesores para el área de matemáticas, en la propuesta “Relaciones de conectividad y complejidad en el eje de problemas y pensamiento matemático avanzado” (Mancera, 2012) se adelanta una reflexión respecto de los propósitos del eje, en concordancia con la propuesta curricular de la licenciatura y la discusión sobre la relación que los espacios de formación de dicho eje guardan horizontalmente entre sí. Los espacios de formación fueron agrupados en tres conjuntos y se analizaron las relaciones de complejidad y conectividad entre ellos, en interacción con los conceptos de proporción y medida. Se expone la complejidad de tales objetos matemáticos y de los procesos matemáticos asociados a su tratamiento en las distintas representaciones, el lenguaje matemático, en las formas de argumentación y validación y en los procesos de modelación, entre otros, para desarrollar así, competencias profesionales en el estudiante que se forma como profesor.

Los referentes descritos hasta el momento permiten apreciar la importancia del tema en el contexto educativo global, nacional y local, así como acercarse apropiadamente a la problemática que se aprecia en el colegio Rufino José Cuervo IED, de la Localidad 6, Tunjuelito. Esta institución ofrece educación media técnica articulada con la IES Uniminuto. Durante los años 2015 y 2016 el índice final de reprobación fue del 40.8 % y

32.14% de los 40 estudiantes respectivamente; de estos la gran mayoría presentaba pérdida de la asignatura de matemáticas. (Acta de comisión y evaluación nov-2015, nov 2016).

Tales resultados se ven reflejados en el desempeño de los estudiantes en las pruebas saber 9° en el área de matemáticas, afectando al siguiente ciclo, puesto que son los estudiantes de este grado quienes harán parte del ciclo 5. Como lo muestran los resultados de las pruebas ICFES durante los últimos años y tomando como promedio de estos 218 estudiantes de noveno grado, el nivel de desempeño de los estudiantes evidencia un incremento del 10% de los 40 estudiantes que se encuentran en ***insuficiente***, correspondiente con la disminución en el 10% de los 40 estudiantes que alcanzan el desempeño ***mínimo***. Aunque el desempeño ***satisfactorio*** tuvo un avance en el 2013, se ha mantenido y hay ausencia de estudiantes del plantel en el nivel ***avanzado***.

Al comparar los resultados de la institución con las demás instituciones de educación de Bogotá, por niveles socioeconómicos, se aprecia que los desempeños de los estudiantes corresponden directamente con el estrato 1 y 2, con una variación del 1%.

De acuerdo con los pensamientos matemáticos evaluados en la prueba, el pensamiento con mayor dificultad para los estudiantes de la institución es el pensamiento numérico – *variacional*, con lo cual se hacen evidentes las debilidades en el manejo de ecuaciones y funciones, entre otros, con que ingresan los estudiantes a la media técnica y los cuales se convierten en el principal obstáculo para la comprensión y desarrollo exitoso de sus clases de matemáticas.

Con el informe de las pruebas saber 3°, 5° y 9°enviado por el MEN a la institución, se recomienda trabajar en los “aprendizajes por mejorar” desde las tres competencias evaluadas, debido a las dificultades evidenciadas. Los aprendizajes a mejorar se encuentran distribuidos en los cinco pensamientos matemáticos, específicamente del **pensamiento**

variacional, ya que los estudiantes no hacen uso de funciones para modelar situaciones de variación, no reconocen el lenguaje algebraico como forma de representación de procesos, no identifican características de gráficas cartesianas relacionadas con una situación y no interpretan tendencias asociadas a situaciones de variación.

Entre el 60% y el 80% de los 40 estudiantes no alcanza los estándares básicos en matemáticas, de acuerdo con el MEN para ciclo 4, iniciando desde la transición aritmética – algebra, las regulares bases geométricas, unidas a las tendencias erróneas generalizadas desde las mismas prácticas pedagógicas de los docentes, entre otras variables que involucran el proceso de enseñanza aprendizaje; esto combinado con un ambiente escolar, en el cual se adolece de la necesaria diversidad de ejemplos que permitan la manipulación de material concreto, mediante diferentes representaciones que fundamenten las aplicaciones de los conceptos matemáticos en diferentes áreas de formación profesional como la ingeniería, medicina, ciencias sociales entre otras y su aplicación en la solución de problemas.

Por otro lado, como señala Castro de Bustamante en su artículo La investigación en educación matemática: Una hipótesis de trabajo:

> …la Matemática es una ciencia con tal nivel de importancia y repercusión que aparece contemplada en la mayoría de los diseños de las carreras universitarias, y los programas de formación docente no son una excepción. Sin embargo, en la mayoría de los casos la perspectiva bajo la cual se enseña, se orienta más hacia su uso instrumental que hacia el desarrollo del pensamiento lógico, y menos aún a mostrarla como un posible campo de investigación.¨ (Castro de Bustamante, Scielo, 2007)

A fin de delimitar la problemática en la población a estudiar, así como la posterior implementación de la propuesta, se estableció una muestra poblacional compuesta por 40 estudiantes de las modalidades de electricidad y redes de computadores del IED Colegio Rufino José Cuervo, cuya edad se ubica entre los 14 y 18 años (X= 14,79; S= 1,33). El 91,17 % delos 40 estudiantes no son repitentes mientras que el 8,83 % si lo son; el 97,1 % de los 40 estudiantes de la muestra no presentan necesidad educativa especial diagnosticada, en tanto que 2,9% si; el 70,59% no cuentan con servicio de internet en sus casas, mientras que el 29,41% restante sí; el 73,52% de los estudiantes leen entre 1 y 5 libros al año, el 8,82 % de 6 a 10 libros, el 5,88% leen en promedio más de 25 libros año mientras que otro 5,88 no han leído ningún libro; el 85,29% indica que se le dificulta la asignatura de matemáticas, el 14,71 % dice no tener dificultad con esta asignatura y el 52, 94% manifiesta que al presentarse alguna dificultad en la asignatura acude al docente para solucionarla, por otra parte el 5,88% de los 40 estudiantes le consulta a un compañero, otro 5,88% consulta en Internet, mientras que el 2,94% de los 40 estudiantes solicita ayuda con un externo, otro 2,94 busca información en libros y finalmente un 2,94% de los 40 estudiantes no hace nada para superar sus dificultades.

Para el pilotaje de la prueba (ver Apéndice B) se seleccionó un grupo de 10 estudiantes de grado décimo en la modalidad de diseño. La duración estimada inicialmente para la prueba fue de una hora clase, pero en la ejecución se evidencia la necesidad de duplicar el tiempo, para que los estudiantes terminen de responder la prueba. De la prueba original se ajustaron los planes de celular, eliminando la información referida al IVA, debido a que su interpretación y cálculo, se convierte en un obstáculo en el desarrollo de la prueba, mostrando dificultades operativas que no afectan directamente la interpretación de los sistemas de representación y sus cambios. La aplicación se realizó de forma grupal en el salón de clases. Al inicio se explica el objetivo de la investigación, la importancia de contestar de forma individual y veraz, aclarando que está no es de carácter evaluativo y las respuestas dadas no afectan los resultados académicos.

Los datos recolectados durante el diagnóstico se han analizado teniendo en cuenta su naturaleza cualitativa y cuantitativa. Los resultados se presentan teniendo en cuenta las categorías teóricas que orientaron la construcción del instrumento, relacionadas con los sistemas de representación de funciones (ver Apéndices By C). Mostrando los resultados obtenidos en cada nivel de comprensión del sistema de representación, en primera instancia para el lenguaje natural, en segundo lugar, la representación tabular, a continuación, la información obtenida para el sistema de representación gráfico. Por último, se presentan los resultados de los cambios entre sistemas de representación.

Lenguaje natural

De acuerdo con los resultados de la primera pregunta del instrumento diagnóstico se evidencia que el 30 % de los 40 estudiantes de la muestra tienen dificultades para decodificar la información dada al lenguaje natural, ubicándolos en el **nivel 1**, al cual pertenecen las personas que tienen dificultades en la fonología, morfología y reglas gramaticales del idioma; es decir no hacen una buena lectura de los símbolos, omitiendo conectores y signos de puntuación, por lo cual cambian el sentido de las oraciones y de la información.

En el **nivel 2** están los que le dan sentido a la oración e interpretan el enunciado; es decir el texto tiene sentido, forma y cohesión. Dan una interpretación o sentido, básico o elemental de la información contenida sin generar relaciones entre la información, ya sea está implícita o explícita. En este nivel tenemos un 17.5% de los 40 estudiantes de la muestra.

En el **nivel 3** se encuentran quienes mediante actos locutivos, función discursiva, función metadiscursiva, sinonimia y paráfrasis, manifiestando interpretar símbolos y la información en su totalidad, generando relaciones básicas que clarifican el enunciado; mediante sinónimos, explicaciones de términos y comparaciones. En este nivel se tiene un 22.5% de los 40 estudiantes de la muestra.

En el **nivel 4** se ubican los estudiantes que mediante actos ilocutivos, relacionan el objeto con sus propiedades, es decir interpretan los símbolos, las relaciones y dan a los elementos algunas de sus propiedades cualitativas o cuantitativas. En este nivel se tiene 17.5% de los 40 estudiantes de la muestra.

En el **nivel 5** se encuentran quienes mediante el perlocotus que hace referencia a la descripción escrita y/o verbal de la información, interpretan la totalidad de la información y relacionan los objetos con sus propiedades, reconociendo las variables presentes y su relación. En este nivel se tiene 12.5% de los 40 estudiantes de la muestra.

Sistema de representación tabular

En el instrumento diagnóstico se incluyeron indicadores de interpretación de información tabular y construcción de tablas evaluando las variables involucradas con las relaciones o restricciones que la información contiene. El 77.5% de los 40 estudiantes de la muestra se encuentra en **nivel 1** en el cual solo se hace una lectura de las tablas, estén en lenguaje formal o natural; también se visualizan las variables mas no se establece una relación de las mismas con sus propiedades cualitativas o cuantitativas.

En el **nivel 2** se encuentran quienes asocian la correspondencia de valores a una pareja ordenada; evaluar las variables en valores determinados, reconociendo la incógnita como un conjunto de valores que representa una regularidad con parámetros definidos mediante restricciones e invariantes asociadas a los mismos. Este proceso es el paso inicial para la apropiación de la representación algebraica. En este nivel se tiene 22.5% de los 40 estudiantes de la muestra.

Los niveles de comprensión 3, 4 y 5 del sistema de representación tabular no obtuvieron ninguna respuesta, mostrando la dificultad para establecer relaciones entre magnitudes, diferencias entre pares ordenados y razones de cambio.

Sistema de representación gráfico

Los resultados de este sistema de representación muestran un problema en la construcción de gráficos, empezando por la dificultad para discriminar el uso apropiado de cada gráfico, el manejo de escalas en cada eje, ubicación de parejas ordenadas en un plano cartesiano que sería el nivel 1, en este estado se encuentran el 47.5% de los 40 estudiantes de la muestra, los demás no respondieron las preguntas relacionadas. Dejando en evidencia la necesidad de desarrollar actividades que propendan por la comprensión, uso adecuado e interpretación de gráficas.

El diagnóstico realizado permite apreciar que:

- Es necesario fortalecer el aspecto lecto-escritor, particularmente la decodificación de los símbolos, interpretación y análisis de la información. Este proceso incluye la codificación mediante una paráfrasis, sinonimia reconocimiento de las variables presentes y las relaciones entre las mismas, junto con las propiedades cualitativas y cuantitativas.

- Los resultados tienen una distribución normal con un sesgo a derecha, ubicando la mayor parte de la población (el 70% de los 40 estudiantes) en los primeros niveles. Acentuando los problemas mencionados en un amplio porcentaje de la población.
- En el momento de la intervención se debe destinar gran parte del trabajo al desarrollo de las competencias lecto-escritoras.
- El desarrollo del sistema de representación tabular implica una apropiación de las competencias básicas aritméticas, una buena lectura e interpretación de la información en el lenguaje natural, gráfico, algebraico y tabular que le permita al individuo reconocer las invariantes y regularidades entre dos o más variables relacionadas.
- Reconocer la letra en cada estado de transición de la misma, desde su estado como objeto, pasando por letra evaluada y finalizando en el concepto de variable.
- No realizar adecuadamente la representación gráfica, es un problema que afecta directamente la capacidad de cambiar de sistema de representación gráfico-tabular, gráfico-natural y gráfico-algebraico. Este último hace referencia a modelos básicos que se deben conocer y manejar, para establecer una representación que fortalezca el concepto de función.

De esta manera se hace evidente la necesidad de intervenir positivamente en el proceso educativo de la población, en busca de favorecer los resultados académicos y más allá de ellos, su vida laboral, dada la rapidez con que se desarrollan los eventos día a día, la cantidad de información que se debe manejar y conocer para tomar una decisión o solucionar un problema, entendiendo este como "una situación que requiere el manejo apropiado, oportuno y eficaz de los recursos o información en función de un objetivo, bien sea social, económico o teórico". Así pues, se hace necesario que el individuo esté en capacidad de construir herramientas que le permitan reducir la incertidumbre en la toma de decisiones acertadas en el menor tiempo y que impacten con mayor eficiencia y eficacia. Tales herramientas teóricas tienen su cuna en la matemática y la experiencia de cada individuo.

Basados en lo descrito párrafos atrás, se observa una tendencia de los estudiantes hacia una baja apropiación y uso de conceptos de variación como la función y los sistemas de representación entre otros, los cuales enriquecen no solo a nivel teórico al individuo, sino que también lo dotan de herramientas para adquirir estrategias de solución con una base de modelos ya probados previamente desde la experiencia práctica de las teorías.

Es por esto que se requiere de otras formas de enseñanza que permitan a los estudiantes desarrollar procesos entorno al concepto de función. Lo anterior abre el campo de acción orientado al fortalecimiento de loa comprensión entre las transformaciones en los sistemas de representación, puesto que la aproximación al mundo se hace a través de sus representaciones y la comprensión de las relaciones entre las mismas.

El no conocerlas o no tenerlas como parte de los conocimientos esenciales, lo hace vulnerable ante situaciones que requieran la resolución de problemas cotidianos con un criterio que vaya más allá de la experiencia, aceptación de consejos o la intuición. Esto se evidencia en situaciones tales como la selección de una profesión, el manejo del dinero, la solución de conflictos, el orden de las tareas diarias (entendiendo estas como cualquier actividad que tenga asignada), la falta de hábitos de estudio, bajos desempeños en las pruebas institucionales internas y externas, que a su vez terminan impidiendo el acceso a la educación superior, o la incursión de un proyecto de vida que le permita desarrollarse a nivel social, económico o intelectual.

La situación problémica descrita en la institución educativa, así como los argumentos en favor de promover el adecuado aprendizaje de las matemáticas en sus diversos temas, en procura de apoyar la formación de los individuos, conduce al planteamiento de la siguiente **pregunta científica**: ¿Cómo fortalecer la comprensión de las transformaciones entre los sistemas de representación de las funciones, en estudiantes de las modalidades de Redes y Electricidad de ciclo 5 del IED Colegio Rufino José Cuervo?

Dicha pregunta se inscribe dentro del **objeto de estudio** didáctica de las matemáticas, entendida como el proceso mediante el cual el individuo se apropia de los conocimientos matemáticos y hace uso de ellos en la comprensión de su mundo y la resolución de problemas que se presentan en su cotidianidad, tanto para aspectos personales como profesionales y vitales.

Dentro del mencionado objeto de estudio el presente proyecto investigativo se ocupará del **campo de acción** teórico correspondiente al proceso de aprendizaje de las transformaciones entre los sistemas de representación de las funciones.

En procura de dar respuesta a la pregunta de investigación se ha trazado como **objetivo investigativo general** el determinar los componentes de una propuesta didáctica orientada al fortalecimiento de la comprensión de las transformaciones entre los sistemas de representación de las funciones, en los estudiantes de media fortalecida de las modalidades de redes y electricidad del IED Colegio Rufino José Cuervo. Para dar cumplimiento a este objetivo general y resolver la pregunta científica se han definido las siguientes **tareas de Investigación**:

- Adelantar la revisión documental sobre el objeto de estudio y categorías teóricas que permiten comprender el fenómeno a examinar.

- Construir una propuesta didáctica orientada al fortalecimiento de la comprensión de las transformaciones entre los sistemas de representación de las funciones.
- Evaluar el proceso de implementación de la propuesta didáctica aplicada a los estudiantes de media fortalecida de las modalidades de redes y electricidad del IED Colegio Rufino José Cuervo.

De acuerdo con el objetivo y tareas científicas, la presente investigación adelanta mediante un diseño basado en la investigación acción, en los términos que propone Elliot (2000)[1], cuando afirma que se relaciona con los problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores. Así mismo se enmarca dentro de un enfoque cualitativo[2] según lo indicado por Vasilachis de Gialdino (2009), dado que se propone identificar el nivel de comprensión de los estudiantes acerca de los cambios entre los sistemas de representación de las funciones, mediante la aplicación de una propuesta de didáctica que permita fortalecer dicha comprensión, fundamentado en el paradigma Sociocrítico[3]. Su alcance es descriptivo si consideramos a Sampieri (2016)[4], dado que cuenta con un método teórico comparativo[5] y empírico[6] que va desde la observación y la medición hasta la experiencia de campo, propendiendo por la creación de espacios que

---

[1] "Características de la investigación-acción en la escuela: *analiza las acciones humanas y las situaciones sociales experimentadas por los profesores como: (a) inaceptables en algunos aspectos (problemáticas); (b) susceptibles de cambio (contingentes), (c) que requieren una respuesta práctica (prescriptivas)" (Elliot, 2000, pág. 5)
En la investigación acción: Se realiza intervención en un grupo de estudiantes por medio del diseño y aplicación de una secuencia didáctica. En esta se pretende implementar los pasos:
-1. Diagnóstico: Descripción de la población y la situación problémica.
-2. Acción con la muestra que participa en la investigación: Diseño y aplicación de la secuencia didáctica, para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de redes y electricidad.
-3. Evaluación y reflexión: Evaluación de la secuencia didáctica para medir los alcances de la misma. Guiar a los estudiantes en los procesos de auto y coevaluación para el reconocimiento de los avances individuales y colectivos. Socializar con la comunidad educativa los alcances de la secuencia didáctica.
[2] La Investigación cualitativa "emplea métodos de análisis y de explicación flexibles y sensibles tanto a las particularidades de las personas estudiadas como al contexto social en el que los datos son producidos". MASON 1996 pag 11-13, citado por.
[3] El paradigma sociocrítico "entiende a la investigación no como descripción e interpretación, sino en su carácter emancipativo y transformador".
[4] Los estudios descriptivos miden, evalúan o recolectan datos sobre diversos conceptos (variables), aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno a investigar. En un estudio descriptivo se selecciona una serie de cuestiones y se mide o recolecta información sobre cada una de ellas, para así (valga la redundancia) describir lo que se investiga".
[5] "El método comparativo es frecuentemente utilizado para comparar procesos y fenómenos, por ejemplo, las pruebas de diagnóstico de entrada y salida; el comportamiento del grupo de experimentación con el grupo de control; la productividad de distintos centros de trabajo, en la triangulación de instrumentos.
[6] "Los métodos empíricos más utilizados son: observación, experimento, encuesta, entrevista, estudio de casos, técnica de consenso, el método biográfico, etc."

permitan a los estudiantes reflexionar sobre la comprensión, en este caso de un objeto matemático.

Para la recolección de información se utilizaron instrumentos como un cuestionario con elementos y escala tipo Likert[7], revisión documental de las actas de comisión de evaluación y promoción, malla curricular de matemáticas y del reporte de resultados de la institución en pruebas saber 9°.

Los resultados obtenidos durante la implementación de la propuesta se estudiarán por medio del análisis documental.

[7] "La encuesta Tipo LIKERT fue presentada como método de calificaciones sumadas para la medición de actitudes fue desarrollado por R.Likert en 1932, partiendo de una encuesta, sobre relaciones internacionales, relaciones raciales, conflicto económico, conflicto político y religión, realizada entre 1929 y 1931 en diversas universidades de EEUU. (LIKERT,R. 1932)citado por **Fuente especificada no válida.**

1. Marco teórico

Uno de los retos que se asume como docente de matemáticas es garantizar el aprendizaje de los diferentes objetos que hacen parte de la estructura de las matemáticas educativas, situación que, pese a la implementación de diversas estrategias, ya sea de manera individual o grupal, difícilmente permite conseguir con un alto grado de eficiencia dicha apropiación del conocimiento educativo de las matemáticas por parte de los estudiantes. Esto hace necesario adquirir unas habilidades, destrezas y herramientas que permitan mejorar el quehacer pedagógico y así propender por el desarrollo del pensamiento crítico, entendido este como la habilidad de pensamiento complejo de alto nivel formado tanto de habilidades como de disposiciones (Ennis, 2011), de conocimientos relevantes (McPeck, 1990) y competencias metacognitivas (Kuhn y Weinstock, 2002) citados por López (2012); que se afianza a través del desarrollo del pensamiento matemático, en especial el variacional, como puede inferirse de Beltrán y Perez (1996), cuando consideran que "la habilidad de pensar críticamente supone otras destrezas relacionadas con diferentes capacidades por ejemplo capacidad para argumentar, reconocer relaciones importantes, realizar inferencias correctas, evaluar la evidencia y la autoridad, y deducir conclusiones" Furedy (1985);

Las mencionadas habilidades se desarrollan si se es consciente de la necesidad de modificar las concepciones que se tiene con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, proceso que requiere claridad y entendimiento en lo que refiere a las diferencias existentes entre las matemáticas como disciplina académica y las matemáticas educativas, comprendiendo que los objetos de interés en ambas difieren en cuanto a su naturaleza, situación que hace complejo y exigente el rol del docente en especial cuando se trata de un objeto tan determinante, específico, complejo y difícil como es la ***función***.

1.1. Didáctica general

La ***didáctica***, término usado en un inicio para referirse a un género literario, aquel género que pretende enseñar, formar al lector. Intención presente en muchos escritores, como en la Teogonía de Hesíodo (citado por Benedito, 1986), en Las Geórgicas de Virgilio o el Arte de amar, de Ovidio.

Desde la etimología el término ***didáctica*** procede del griego *didaktiké, didaskein, didaskalia, didaktikos, didasko*. Todos estos términos tienen en común su relación con el verbo enseñar, instruir o exponer con claridad. Didaskaleion era la escuela en griego; didaskalia, un conjunto de informes sobre concursos trágicos y cómicos; didaskalos, el que enseña; y didaskalikos, el adjetivo que se aplicaba a la prosa didáctica.

Por su parte Comenio, el autor más importante de los inicios de esta disciplina, quien en su obra "Didáctica Magna", conceptualiza la *didáctica* como "el artificio universal para enseñar todas las cosas a todos, con rapidez, alegría y eficacia" (pág. 12). Revisando diversos autores Estebaranz (1994, 41) Sáenz Barrio (1994, 14) y Ruiz (1996, 25), Benedito (1987, 34) citados por Mallart (2000) se puede concluir que la didáctica es la ciencia de la educación que estudia e interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de conseguir la formación intelectual del educando, en los más diversos contextos.

Esto implica que la didáctica es la encargada de vislumbrar el camino para garantizar el aprendizaje del objeto matemático en mención, ***función***, ya que si se considera que la didáctica se fundamenta y consolida mediante la práctica indagadora, el estudio de las acciones formativas y la proyección de estas en la capacitación y caracterización de los estudiantes y la identidad del docente con el proceso de enseñanza-aprendizaje (Rivilla y Mata 2009 pág. 14), permite ver la importancia de caracterizar y relacionar los diversos componentes del proceso educativo, en especial en el marco de las matemáticas; entendidas estas, en palabras de Philip J. Davis y Reuben Hersh como "el estudio de los objetos mentales con propiedades reproducibles".

Haciendo referencia a las didácticas específicas en particular la didáctica de las matemáticas, asumida como uno de los aspectos fundamentales para la presente investigación, el cual se ha centrado en el Enfoque Ontosemiótico propuesto por Godino y puesto que, como lo indican Chevallard (1991), Duval (1993, 1995), Godino y Batanero (1994) "en matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas", se requiere tratar los ***sistemas de representación*** como la otra categoría principal analizando las diversas transformaciones que se pueden presentar desde la teoría de las funciones semióticas de Duval, todo esto bajo la premisa "sin semiosis no puede existir la noesis" (Duval), la cual indica que la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar los registros de representaciones semióticas de tales conceptos. De esta manera, el aprendizaje se produce cuando se comprenden los sistemas de representación de un objeto, es decir que entre más transformaciones realice un sujeto en los sistemas de representación, en este caso de la ***función***, más se acerca a la comprensión del mismo.

1.1.1. Didáctica de la matemática

La naturaleza especial del conocimiento matemático implica una gran variedad de ideas al respecto sobre ¿cómo? y ¿por qué enseñar matemáticas?, razón por la cual se hace necesario realizar una breve aproximación histórica para contextualizar el surgimiento de la didáctica de las matemáticas y entender así el enfoque ontosemiótico EOS que se asume en esta investigación.

> "Las matemáticas como quehacer humano (las matemáticas son una actividad humana), lenguaje simbólico (el lenguaje de la ciencia) y sistema conceptual (red interconectada de conceptos, propiedades y relaciones, construida progresivamente mediante negociación social). No hay duda que la forma de concebir las matemáticas por parte del profesor incidirá en la forma en que éste las enseña. Godino y Batanero (2013).

La anterior afirmación permite un acercamiento a la relevancia que tiene en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas y la visión del docente al respecto de ellas, por este motivo desde los lineamientos curriculares para las matemáticas se enuncia que la escuela debe promover las condiciones para que se lleven a cabo la construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos, por parte de los estudiantes; requisito que orienta una nueva concepción de las matemáticas escolares llevando a considerar el conocimiento matemático escolar como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del estudiante. Por su carácter social se obliga a ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses que permanentemente surgen y se entrecruzan en el mundo actual; exigiéndole organizar y dar sentido a una serie de prácticas, cuyo dominio requiere esfuerzo individual y colectivo. Por consiguiente se reformula la tarea del docente inmersa en una enorme responsabilidad, puesto que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales. Esta nueva concepción debe llevar

> …al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos, desde luego sin dejar de lado los elementos de la cultura matemática universal construidos por el hombre a través de la historia durante los últimos seis mil años" (serie Lineamientos Curriculares para las matemáticas, pág.14).

Perspectiva que permite diferenciar entre matemáticas académicas y matemáticas educativas siendo estas últimas el referente para la presente investigación, lo que lleva a divisar el panorama que interviene en la enseñanza de las matemáticas.

Este ha sido un proceso complejo que va desde una visión precientífica de los hechos didácticos, como lo denomina Gascón, en la que se concibe el conocimiento matemático como objeto primario de investigación y su enseñanza considerada como un arte, que difícilmente se puede analizar, controlar y someter a reglas (2014, pág. 3); ideas que empiezan a modificarse cuando Brousseau introduce el enfoque clásico que toma como eje central "la actividad cognitiva del sujeto presuponiendo, además, que dicha actividad puede ser descrita y explicada de manera relativamente independiente de los restantes aspectos de la relación didáctica" (Brousseau, 1986), considerando el aprendizaje, como un proceso psico-cognitivo influenciado por factores motivacionales, afectivos y sociales; asignándole a la didáctica de las matemáticas el fin de "proporcionar al profesor los recursos profesionales que éste necesita para llevar a cabo su labor de la manera más satisfactoria posible" (Gascon, 2014).

Se presentan entonces una serie de situaciones que empiezan a revelar la importancia de diversos aspectos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como lo son el saber del docente, el saber enseñar del docente, la disposición del estudiante, la capacidad de aprendizaje del estudiante, objetos y actividades propias de las matemáticas, que junto con la idea expresada en la carta fundacional en 1976 del International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME) donde Bauersfeld y Skowronek, defendiendo que la didáctica de las matemáticas debe elaborar una teoría del aprendizaje matemático (1976), llevan al surgimiento de la didáctica fundamental que se caracteriza por problematizar la propia matemática, al considerarla como punto de entrada para la indagación didáctico-matemática, mientras que las dimensiones cognitivas e instruccionales se consideran derivadas o dependientes de la anterior. Gascón citado por Godino, con base en la teoría de las situaciones didácticas, propuesta por Brousseau asume:

> …que para cada objeto matemático existe una situación matemática (o una colección de situaciones) cuya resolución ha dado origen y sentido a dicho objeto, y que, por tanto, el aprendizaje escolar de dicho objeto debe partir de tales situaciones, o de adaptaciones apropiadas de las mismas. (Brousseau, 1998)

Esto lleva a asumir que los objetos matemáticos (cuya naturaleza no se explicita) son emergentes de las prácticas matemáticas, siendo éste uno de los postulados esenciales de las aproximaciones antropológicas (Wittgenstein) y pragmatistas (Peirce) en filosofía de las matemáticas.

Siendo este el incipiente origen de la ***teoría antropológica de la didáctica***, en la que se asume que la actividad matemática debe ser interpretada (esto es, modelizada) como una actividad humana junto con las demás, en lugar de considerarla únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. De esta manera el enfoque antropológico integra muchos enfoques parciales (epistemológicos, lingüísticos, psicológicos, sociológicos,...). (Chevallard, 1992).

En esta teoría se abarcan diversas propuestas como:

- La dialéctica instrumento - objeto y el juego de marcos (DIO-JM) en la que los conceptos matemáticos tienen una doble dimensión: posibilitan la acción (instrumento) y son conceptualizados como entidades reutilizables en otros procesos similares (no se vinculan necesariamente a una situación determinada) y pueden formar parte de un discurso más general (objeto).
- El reconocimiento de una relatividad de las prácticas matemáticas respecto de los “contextos de uso” internos a la propia matemática. El uso de un marco u otro afecta a los procedimientos de solución, su eficacia relativa e incluso al planteamiento de nuevos problemas. (Douady, 1986)
- La teoría de los campos conceptuales (TCC) indica que un campo conceptual es un “conjunto de situaciones”. Se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones. (Vergnaud, 1990).

Una de las propuestas más importantes que proviene de la teoría de las situaciones didácticas es la "transposición didáctica” propuesta por Chevallard, la cual hace referencia al cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza. Como consecuencia se producen diferencias en el significado de los objetos matemáticos entre la "institución matemática" y las instituciones escolares. (Chevallard 1985).

La teoría antropológica de la didáctica indica que durante el aprendizaje de las matemáticas se

> …introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico (sobre todo representativo). Mundo que surge de una verdadera y compleja interacción con los miembros de la microsociedad de la cual el sujeto que aprende forma parte: los propios compañeros y los maestros (y la noosfera, a veces borrosa, a veces evidente) (Chevallard, 1992).

Esta interacción permite ser consciente del conflicto entre "conceptos espontáneos" y "conceptos científicos"; evidenciando que enseñar no es simplemente generalizar, amplificar, volver más crítico el "sentido común" de los estudiantes; se trata de una acción más bien compleja, como lo refiere Vygotsky en Pensamiento y Lenguaje citado por Godino:

> Como sabemos gracias a las investigaciones sobre el proceso de formación de los conceptos, un concepto es algo más que la suma de ciertos vínculos asociativos formados por la memoria […] es un auténtico y complejo acto de pensamiento que no se puede enseñar mediante la ejercitación y al cual se puede llegar solo cuando el desarrollo mental del niño ha alcanzado el nivel requerido […] El desarrollo de los conceptos, o significados de las palabras, presupone el desarrollo de muchas funciones intelectuales (atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación). También la experiencia demuestra que la enseñanza

directa de los conceptos es imposible y estéril. Un maestro que intenta hacer esto, normalmente no logrará nada, sino un vacío verbalismo. (Vygotskij 1962).

Surge así una definición más general de didáctica de las matemáticas propuesta por Brousseau (1989, p.3,) como "una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos". Definición que en esta investigación se adopta, considerando como objetos particulares de estudio las operaciones fundamentales de la apropiación de los conocimientos, las condiciones de esta y las transformaciones que produce, tanto sobre los conocimientos como sobre sus usuarios, las instituciones y las actividades que tienen por objeto facilitar tales operaciones, desarrollando el pensamiento matemático.

Por su parte Moreno Armella enuncia como un principio en la didáctica que “toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos” (Moreno Armella, 1999), postura que se corresponde perfectamente con la fundamentación de la Teoría de las Representaciones Semióticas en la que Duval expresa la necesidad de determinar algún tipo de existencia para los objetos matemáticos, sin confundir de este modo el objeto matemático con su representación; lo que conlleva a referir la existencia de representaciones mentales internas y de representaciones semióticas externas, que están subordinadas a las representaciones mentales internas, y de las cuales son una exteriorización a efectos de comunicación. Esto supone asumir que la semiosis está dirigida por la noesis, concibiendo por semiosis la aprehensión o la producción de una representación semiótica y por noesis los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la comprensión de una inferencia, entre otras. Duval es adepto a la idea: “es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis” (Duval 1995, pág. 4).

Al contemplar la variedad de ideas al respecto de la didáctica de las matemáticas “se hace necesario tratar de clarificarlas y articularlas” como indica Godino (2012) suscitando así el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Relación que se pretende evidenciar en la Figura 1.

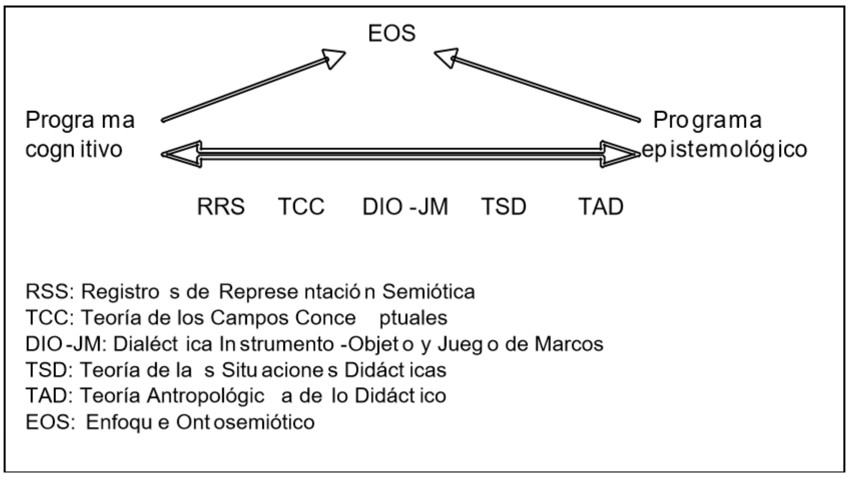


Figura 1. Articulación de programas de investigación en didáctica de las matemáticas

1.2. Enfoque ontosemótico – EOS

El EOS pretende describir las interacciones que suceden en el aula de matemáticas mediante la consolidación de las ideas sobre los significados institucionales y personales, la idea de función semiótica y la ontología matemática introducidas en Godino y Recio (1998); considerando la utilidad de las nociones de patrón de interacción, negociación de significados, norma sociomatemática, planteadas por el interaccionismo simbólico (Cobb y Bauersfeld, 1995; Godino y Llinares, 2000) citados por Godino (2012).

El EOS propone seis dimensiones que se deben contemplar en un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos componentes que indiquen espacio y trayecto:

Epistémica (conocimiento institucional),

Docente (funciones del profesor),

Discente (funciones del estudiante),

Mediacional (uso de recursos instruccionales),

Cognitiva (génesis de significados personales) y

Afectiva (da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas).

Este modelo acoge la "negociación de significados" como elemento valioso para la tarea de las configuraciones y trayectorias didácticas.

El EOS según Godino (2012) analiza los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas desde cinco categorías:

La primera se refiere al **sistema de prácticas, operativas, discursivas y normativas**. En esta se adopta una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). Se utilizan especialmente en el análisis macro didáctico, para captar la forma en que se asumen los conocimientos matemáticos en diferentes marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Pero si se busca examinar profundamente el proceso enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos se requiere tener en cuenta objetos considerados como primarios: situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos, mismo que interactúan se formando configuraciones. Estas últimas y los sistemas de prácticas se presentan como fundamentos teóricos para referir los conocimientos matemáticos desde la dualidad que los caracteriza: personal e institucional. A este respecto Godino (2012) refiere que “conocer en matemáticas quiere decir conocer los sistemas de prácticas”, tanto las operativas como las discursivas; esto implica dominar los numerosos objetos emergentes de los subsistemas de prácticas y las relaciones entre ellos. Cabe aclarar que cuando los sistemas de prácticas son comunicados en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran como objetos institucionales, mientras que si son específicos de una persona se consideran como objetos personales.

La segunda categoría es la **configuración de objetos y procesos matemáticos configuraciones o redes ontosemióticas**, definidos como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones establecidas entre ellos. Pueden ser *epistémicas*, entendidas como las redes de objetos institucionales o *cognitivas* que hacen alusión a las redes de objetos personales. En la actividad matemática se contemplan los objetos ostensivos como los símbolos, gráficos, etc. y no ostensivos para referir a aquellos que evocamos en la actividad matemática, que se pueden representar de variadas maneras ya sea textual, oral, gráfica e incluso gestual a lo que se considera función semiótica. Para Hjemslev (1943) esto se refiere a la dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. La configuración trata las conexiones o relaciones de dependencia entre un antecedente ya sea una expresión, significante, representante y un consecuente que puede considerarse como un contenido o significado representado, instauradas por un sujeto, ya sea una persona o institución, conforme a un determinado código de correspondencia, que puede estar constituido por reglas – hábitos o convenios, frecuentemente implícitos – que anuncian a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Para dar cuenta de la organización y estructura de un sistema de prácticas matemáticas surgen nuevos objetos, tales como: a) los tipos de problemas, que son el fundamento de la actividad misma, b) el lenguaje, ya sea símbolos, notaciones, gráficos, u otra expresión, utilizados como instrumentos del trabajo matemático y como mecanismos para representar los restantes objetos matemáticos, incluidas las definiciones y las proposiciones c) los procedimientos, que sirven como instrumento para la acción, y d) las argumentaciones que justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Las expresiones y los contenidos se relacionan ya sea de manera representacional, cuando un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito, de forma instrumental u operatoria cuando un objeto usa a otro u otros como instrumento y se dice que es estructural si dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos. Se toman como elementos relativizadores de los significados de los objetos matemáticos y otorgantes de calidad funcional al juego del lenguaje (Wittgenstein, citado por Godino) y a la institución, considerando los objetos matemáticos que participan en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas desde las siguientes dimensiones asociadas en parejas: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002).

La tercera categoría es la **configuración didáctica**, como sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema. Esta constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática y contempla las dimensiones del proceso de enseñanza y aprendizaje que identifican los procesos de estudio matemático.

La cuarta categoría alude a la **dimensión normativa**, es decir, el sistema de reglas, hábitos y normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas. Estas generalizan la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. Dicho reconocimiento se asume como el principio explicativo de los fenómenos didácticos.

Y la quinta y categoría se refiere a la **idoneidad didáctica**, como criterio general de ajuste y congruencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. Permite valorar el grado de adecuación y pertinencia de un proceso de estudio matemático según las dimensiones del proceso de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático.

Para el EOS las anteriores categorías permiten resolver el dilema de la representación y significación del conocimiento matemático, caracterizando este por el triángulo epistemológico del conocimiento matemático, que representa un diagrama relacional en el que el significado matemático no puede deducirse a partir de una de las esquinas, el formal o el objeto, sino que siempre requiere de un balance entre todas las esquinas del triángulo.

Esto permite recalcar que el problema epistémico/cognitivo no puede desligarse del ontológico, dado que cuando se habla de "conocer", se pretende elaborar una ontología pequeña, pero suficiente para la dualidad personal-institucional siendo un aspecto esencial en este modelo teórico, como se indica en Godino y Batanero (1994). En el EOS para determinar el "significado de los objetos matemáticos" se hace imperativo observar los componentes del mismo que son de naturaleza ontológica y epistemológica, es decir mostrar la naturaleza y origen de los objetos matemáticos.

Lo expresado con anterioridad implica que en el EOS se amplía la visión pragmática antropológica. Godino (1996) al referirse al proceso enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático afirma que:

> Saber, conocer, comprender un objeto O (sea ostensivo-no ostensivo, extensivo-intensivo...) por parte de un sujeto X (persona o institución) se interpreta

> en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego O como expresión o contenido. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Godino (1996).

Esta modelización semiótica del conocimiento da paso a una interpretación cognitiva de los objetos matemáticos unida a un subsistema de prácticas intencionales, inherentes a una clase de situaciones o contextos de uso, por medio de la pareja, entendida como un sistema de prácticas personales-configuración cognitiva. Por lo tanto, para reconocer el concepto que tiene un sujeto al respecto de un determinado objeto (para efectos de la presente investigación el objeto es ***función***) se debe revisar "el sistema de prácticas operativas y discursivas que ese sujeto manifiesta en las que se pone en juego dicho objeto" Godino (2012). Dicho sistema está ligado a unas condiciones y a un instante determinado, describiéndose por medio de una red de objetos y relaciones que se ponen en juego mediante lo que se denomina *configuración cognitiva*. De igual manera, la comprensión y el conocimiento se forjan en una dimensión dual, personal-institucional, implicando los sistemas de prácticas operativas y discursivas ante ciertos tipos de tareas problemáticas. El aprendizaje del objeto ***función*** por parte del sujeto **estudiante** se entiende como la apropiación de los significados institucionales de ***función*** por parte del sujeto **estudiante**. Ello se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados.

Desde los lineamientos curriculares para las matemáticas se propone que la principal finalidad para la construcción del conocimiento matemático es que los estudiantes comprendan las matemáticas o que logren competencia o capacidad matemática (serie lineamientos curriculares), lo cual, siguiendo a Vergnaud (1990), "consiste en la construcción progresiva de representaciones mentales, implícitas o explícitas, que son homomórficas a la realidad para algunos aspectos y no lo son para otros".

Para los fines de la presente investigación es menester hacer claridad con respecto a estos términos: para Godino (2012) "generalmente tener competencia es equivalente a tener conocimiento práctico sobre algo; se usa habitualmente referido a destrezas manipulativas o procedimentales". Con respecto a las matemáticas se indican competencias generales, como competencia aritmética, algebraica, geométrica; o más específicas como, competencia para resolver ecuaciones, cálculo con fracciones, entre otras. Por su parte Duval (1993 pág 46) refiere que "la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".

De otra parte, Skemp (1976) al hablar de comprensión afirma que se debe diferenciar entre comprensión relacional (saber qué) y comprensión instrumental (saber hacer); resaltando la importancia de la comprensión relacional, dado que en la instrumental se pueden presentar fallas si la tarea pedida no se ajusta exactamente al patrón estándar, por la múltiple aplicación de reglas en lugar de unos pocos principios de aplicación general. Mientras que la comprensión relacional presenta la ventaja de ser más adaptable a nuevas tareas. Al saber porque un método funciona y cómo funciona, es posible ajustar los métodos a los nuevos problemas. Otra ventaja es que son más fáciles de recordar, aunque son más difíciles de aprender. Una vez se sabe cómo están interrelacionadas se pueden recordar mejor que como partes aisladas.

La intencionalidad de la presente investigación se fundamenta en la comprensión relacional dado que, según afirma Godino (2012), "una persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas". Situación claramente estipulada dentro del EOS en el que el concepto de sentido requiere del análisis de la correspondencia entre un objeto matemático, ***función,*** y el tipo de situaciones de la cual emerge, a lo que se denomina "significado situacional" Godino(2012) otorgándole la razón de ser al objeto ***función***, su justificación u origen fenomenológico. Pero además se deben contemplar y enfatizar las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto ***función*** y los otros elementos operativos y discursivos del sistema de prácticas dentro del que pensamos acontece el objeto ***función***, aprendido ya sea en términos cognitivos o en términos epistémicos. Siendo esta última la razón para retomar como fundamento teórico los enunciados del EOS y la instrucción matemática, dado que en el caso del objeto de estudio ***función***, como lo refiere Duval (1978), citado por Vasquez (2009), "una función no es ni una estadística de valores ni una representación gráfica ni un conjunto de cálculos ni una fórmula, sino todo ello al mismo tiempo". Por lo tanto si se espera el aprendizaje del concepto de función lineal en el estudiante, este debe estar en capacidad de diferenciar el concepto de sus representaciones, siendo las actividades de transformación entre diferentes sistemas de representación las que favorecerían esta diferenciación como lo manifiesta Janvier (1995)

> …el aprendizaje de las funciones se da siempre y cuando se desarrolle la capacidad del estudiante para interpretar y usar cada una de las representaciones del concepto de función. Así mismo la capacidad de trasformación de uno a otro indica la comprensión del mismo. Janvier (1995) citado Gutiérrez, (2007).

Postulados que ratifican y reiteran lo dicho por Duval (1993):

> …la adquisición conceptual de un objeto matemático ***función*** se basa en dos de sus características "fuertes": 1. el uso de más sistemas de representación semiótica es típica del pensamiento humano. 2. la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo (histórico) de progreso del conocimiento.

Demostrándose así la interdependencia entre noética y semiótica, y cómo se pasa de una a otra. Por lo tanto no solo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica se acoge como aspecto imperativo e ineludible para iniciar la noética. Siendo así que la construcción de los conceptos matemáticos está ligada a la capacidad de emplear más sistemas de representaciones semióticas de esos conceptos, es decir "la expresión misma de la capacidad de representar los conceptos, de tratar las representaciones obtenidas al interior de un registro establecido y de convertir las representaciones de un registro a otro." Duval (1993).

1.3. Sistemas de representación

Desarrollar el pensamiento matemático implica tener certeza sobre los diversos fenómenos que intervienen en el proceso de aprendizaje de cualquier objeto matemático, para esta investigación el objeto es ***función,*** ya que se busca realizar la apropiación de este concepto y que se tiene clara la importancia de los sistemas de representación. Para efectos de esta investigación, cuando se habla de sistemas de representación se hace referencia a sistemas semióticos de representación; para su comprensión y su aprendizaje se parte de tres supuestos fundamentales, propuestos por Lesh R:

> a) Las personas interpretan sus experiencias usando modelos, b) Estos modelos consisten en sistemas conceptuales que son expresados usando una variedad de

sistemas de representación (material concreto, símbolos escritos, lenguaje hablado, etc.) que le permiten construir, describir, explicar, manipular, predecir o controlar el sistema de interés y c) Los modelos desarrollados en y para la comprensión del mundo que lo rodea, son constantemente interpretados y reinterpretados". Lesh R. (2003).

Entendiendo así que si se efectúa un análisis epistemológico de la realidad por ínfimo que sea, requiere de un modelo que se expresa a su vez mediante un sistema de representación, esto da origen a las interpretaciones que no son otra cosa más que la interacción entre el modelo y el sistema por medio del cual es representado. Entre más complejo sea el objeto a interpretar se necesitarán más sistemas de representación dado que cada uno refleja diversos niveles de comprensión del objeto.

Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos, tales como el enunciado en lenguaje natural, la fórmula algebraica, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras. Ellas provienen de las representaciones conscientes y externas, por lo que son de diferente tipo, como por ejemplo un gráfico, el lenguaje natural o los símbolos. Las representaciones se clasifican en dos grandes grupos según conserven o no algunas de las propiedades pertenecientes al objeto que representan: representaciones analógicas si conservan relaciones de vecindad como las imágenes y representaciones no-analógicas cuando no conservan ninguna relación de vecindad con el objeto, como las lenguas. Duval (1999:14).

Por consiguiente la interpretación de los modelos creados para el estudio de un objeto ***función***, solo se hace cuando el estudiante coordina la mayor cantidad de sistemas de presentación, coordinación que se efectúa por medio de dos actividades básicas de tratamiento al interior de un mismo sistema semiótico de representación y/o de conversión entre diferentes sistemas. Ello conduce a que, en el caso de las matemáticas, las representaciones semióticas no sólo sean indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.

El modelado como estrategia de aprendizaje reconoce que para desarrollar un concepto de un objeto matemático son precisos ciertos intervalos de tiempo, además permite adelantos conceptuales individuales y colectivos. Por otra parte los modelos y los sujetos que los construyen, tienden a evolucionar a niveles cada vez más altos en su proceso de refinación, por ejemplo permite pasar de lo concreto a lo abstracto, de lo simple a lo complejo, de lo intuitivo a lo formal o de lo situado a lo descontextualizado, generando espacios de interacción, discusión y confrontación.

En su teoría Duval (1998) refiere que las representaciones semióticas empleadas en matemáticas, no se crean de modo aislado, sino que hacen parte de un sistemas de representación con su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, y que pueden ser caracterizadas al determinar las actividades cognitivas que permiten desarrollar, estableciéndolo en los siguientes términos: "Para que un sistema semiótico sea un sistema de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis Duval (1998, p. 177-178):

- En primer lugar, "la formación de una representación identificable como una representación de un sistema dado" Duval (1998, p. 177-178), acto que se realiza por medio de la creación de un indicio o conjunto de indicios perceptibles, a lo que se le denomina actividad de formación, determinada por ciertas reglas de conformidad, entendidas estas como "aquellas que definen un sistema de representación". Conllevan la determinación de unidades elementales, así como las combinaciones aceptables de unidades elementales para formar unidades de nivel superior y además generar las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa, y por último favorecen tanto la comunicabilidad, como la utilización de los medios de tratamiento que ofrece el registro semiótico empleado, por ello "permiten el reconocimiento de las representaciones como representación en un sistema determinado". (Duval, 1999 p. 43).

- En segundo término, "el tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ésta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un sistema de representación" Duval, (1998, p. 177-178). Se efectúa acorde con las únicas reglas propias del sistema semiótico. Para esta actividad se fijan reglas a las cuales se les denomina reglas de expansión, su aplicación provoca una representación en el mismo sistema de representación de partida. Estas reglas pueden ser de cuatro tipos: reglas de derivación, de producción, de coherencia temática y las reglas de asociación de ideas, Duval (1999).
- En tercer lugar, "la conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial" (Duval, 1998, p. 177-178). Para esta es determinante que sea clara la diferencia entre el contenido de una representación y lo que se está representando, dado que sin esta ni se comprende ni se efectúa la actividad de conversión. En esta por lo general no existen reglas claras para la conversión de un sistema de representación en otro; incluso, pese a que se puntualicen reglas de conversión se presentan dificultades e

imprecisiones, dado que estás varían según el sentido en el que se efectúe el cambio de registro, lo cual implica la unicidad en la aplicación de estas reglas. (Duval, 1999; 2004). Según Duval (2006, pág. 166), este "es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas", razón por la cual se asume que la comprensión de un contenido conceptual se apoya en la coordinación de al menos dos sistemas de representación y ésta se hace evidente en la celeridad y la naturalidad de la acción cognitiva de conversión.

Para garantizar la construcción y aprendizaje del concepto matemático ***función***, es imperativo revisar los planteamientos anteriores, dado que la naturaleza abstracta del objeto ***función*** hace que no sea posible acceder a éste sin valerse de diversos recursos, tales como lenguaje, figuras, esquemas, símbolos o en general a algún registro semiótico particular. Lo anterior y el hecho de que las representaciones semióticas de los objetos matemáticos son no-analógicas, y que dependiendo del sistema donde se produzca dicha representación puede pasar a ser puramente computacional lleva a que una gran cantidad de sujetos **estudiantes** confundan los objetos matemáticos ***función*** con la representación que de ellos se hace, es decir, se termina estudiando la representación y no lo representado (objeto matemático ***función***). En realidad, según Duval (1999, 2004), sólo hay un medio para diferenciar un objeto de su representación: es necesario disponer de otra representación semiótica del objeto representado y reconocerla como una misma representación.

Los sistemas de representación que se acogen en la presente investigación son: El sistema de representación en lengua natural (castellano), el sistema de representación gráfico, el sistema de representación tabular y el sistema de representación algebraico. Teniendo en cuenta que se debe realizar la discriminación de las unidades significantes se requiere de la identificación y el estudio del conjunto de invariantes entre dichos sistemas de representación (ver apéndice C), lo que facilita el estudio del concepto de función desde tres facetas: • Unificación de conceptos. • Modelizar el objeto función • Estipular una única unidad significante cognitivamente pertinente, que permita el estudio de las dificultades presentadas en la actividad cognitiva. Formándose de ésta manera el criterio de valoración de las actividades de la propuesta al que según Duval (1999, p.52) se llama congruencia y esta se determina con base en tres criterios: "posibilidad de correspondencia semántica de las unidades significantes, univocidad semántica terminal y orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones"

1.3.1. Sistema de representación gráfico

En este sistema de representación, la función se puede representar por medio de una línea, continua o no, que se ubica en el plano cartesiano. Se coloca en juego la noción de grafo de una función. Esta representación gráfica se vincula con las habilidades conceptualizadoras de la visualización y se conecta con la geometría y la topología. La lectura de representaciones gráficas de la función comprende una interpretación global, ya que se trata de discriminar variables visuales y percibir las variaciones correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica. Los objetos del sistema de representación gráfico son los ejes del plano y los puntos definidos por las duplas, si es bidimensional o tripletas si es tridimensional. La primera regla de conformidad, es la ubicación de puntos a partir de dos o tres ejes coordenados graduados, determinados por una dupla o tripleta; las demás reglas, estarán determinadas por el tipo de relación entre los componentes de las duplas o tripletas. Se identifican dos reglas de tratamiento: El cambio de unidad para la graduación de los ejes y cambio de escala (zoom). Esto porque son estas reglas de tratamiento las que permiten observar dos representaciones diferentes de un mismo sistema. En este sistema de representación, es posible identificar otro tipo reglas, las cuales producen nuevas representaciones a partir de una dada, aplicando sobre este una o varias operaciones tales como, traslaciones, rotaciones, dilataciones de los ejes y simetrías. Duval (1999). Para determinar las unidades significantes de este sistema de representación y cada una de las cantidades de magnitud presentadas en la situación, se identifican con alguno de los ejes coordenados graduados y luego se analizan los cambios o variaciones de dichas cantidades.

1.3.2. Sistema de representación de lenguaje natural

En este sistema de representación del objeto **función** se acepta una descripción en lenguaje natural. Para modelar una situación se parte de dicho sistema. Esta representación de lenguaje natural se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar situaciones contextualizadas. Como aspectos relacionados con el tratamiento se encuentran:

Descripciones, explicaciones, argumentaciones, deducciones, asociaciones verbales, razonamiento, discriminar la información, identificación de magnitudes que covarían en la situación, descripción de situaciones de variación, reconocimiento de intervalos de covariación constante e identificación de intervalos de crecimiento y decrecimiento y su coordinación. El sujeto puede decir con sus propias palabras lo que sucede en la situación de variación, y de esta forma identificar las magnitudes que cambian y las magnitudes que permanecen constantes, luego puede realizar predicciones de la situación a partir de las relaciones que ha establecido.

Para las unidades significativas se rescatan: magnitudes que varían y unidades de medida, variable independiente (x), tipo de relación entre los valores de la variable independiente, variable dependiente (y), tipo de relación entre los valores de la variable dependiente (y), relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y).

1.3.3. Sistema de representación tabular

En este registro la función se representa con una tabla de valores en donde se pone en juego la relación de correspondencia entre variables. La representación tabular posee una relación directa con el pensamiento numérico. Para indicadores del tratamiento se enuncian la construcción de tablas, relación que guardan los valores de la variable independiente y la relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente. Para unidades significantes se consideran las siguientes: elaborar la tabla con dos filas y tantas columnas como se requieran dependiendo de los valores de **(y)** que se quieran hallar, se ubica la variable **(x)** (independiente) en la celda de la primera fila y en la primera columna se asignan valores a ***(x)***, en la fila superior de las columnas siguientes hay que tener en cuenta que los valores de la variable independiente estén ordenados, se ubica la variable ***(y)*** (dependiente) en la celda de la segunda fila y en la primera columna, se hallan los valores de **(y)** en las celdas de la fila inferior en las columnas siguientes, efectuando la multiplicación a partir de los valores de ***(x)***, tipo de relación entre los valores de la variable independiente, variable dependiente ***(y)***, tipo de relación entre los valores de la variable dependiente **(y)**, relación entre los valores de la variable independiente **(x)** y los valores hallados de la variable dependiente **(y)**, relación que guardan los valores de la variable independiente, la variación entre términos consecutivos es constante, la relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también.

1.3.4. Sistema de representación algebraico

En este registro, la función es representada por una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen para todo x perteneciente al dominio de la función f, 3.1y se nombra f(x). Esta expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, la cual permite formular generalizaciones, sus referentes en el tratamiento son: procedimientos algebraicos, reemplazar la variable **(x)** con diversos valores arbitrarios, efectuar el producto indicado, hallar los valores de y establecimiento de un patrón de cambio. Por otro lado como unidades significativas se tienen la variable dependiente y la variable independiente.

1.4. Competencia

Según lo estipulado por el MEN la noción de competencia está vinculada con un componente práctico: **"Aplicar lo que se sabe para desempeñarse en una situación"** (Estándares básicos de calidad en matemáticas y lenguaje). Con respecto a las matemáticas, ser competente se relaciona con ser capaz de realizar tareas matemáticas, además de comprender y argumentar por qué pueden ser utilizadas algunas nociones y procesos para resolverlas. Es decir, emplear el saber matemático para resolver problemas, adaptarlo a situaciones nuevas, establecer relaciones o aprender nuevos conceptos matemáticos, vinculándose de esta manera la competencia matemática con diversos aspectos que se encuentran inmersos en toda la actividad matemática de manera integrada:

- **Comprensión conceptual de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas:** Incumbe el conocimiento del significado, funcionamiento y la razón de ser de conceptos o procesos matemáticos y de las relaciones entre estos. En los Lineamientos curriculares se instauran como conocimientos básicos: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

- **Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos:** Concierne el conocimiento de procedimientos matemáticos (como algoritmos, métodos, técnicas, estrategias y construcciones), cómo y cuándo usarlos adecuadamente y a la flexibilidad para adecuarlos a diversas tareas presentadas.
- **Modelación:** Entendida como la forma de puntualizar la interrelación existente entre el mundo real y las matemáticas, es un elemento primordial para resolver problemas de la realidad, construyendo modelos matemáticos que reflejen exactamente las circunstancias planteadas, y para hacer predicciones de una situación original.
- **Comunicación:** Exige el reconocimiento del lenguaje propio de las matemáticas, emplear las nociones y procesos matemáticos en la comunicación, reconocer sus significados, expresar, interpretar y evaluar ideas matemáticas, construir, interpretar y ligar representaciones, producir y presentar argumentos.
- **Razonamiento:** Se entiende como la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. encierra prácticas como justificar estrategias y procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas, encontrar contraejemplos, argumentar y exponer ideas.

- **Formulación, tratamiento y resolución de problemas:** Este aspecto contienen los anteriores, se relaciona con la capacidad para identificar aspectos relevantes en una situación para plantear o resolver problemas no rutinarios; es decir, problemas en los cuales es necesario inventarse una nueva forma de enfrentarse a ellos.
- **Actitudes positivas en relación con las propias capacidades matemáticas:** Pretende que el estudiante adquiera confianza en sí mismo y en su capacidad matemática, que piense que es capaz de resolver tareas matemáticas y de aprender matemáticas; en suma, que el estudiante admita y valore diferentes niveles de sofisticación en las capacidades matemáticas. También que se reconozca el saber matemático como útil y con sentido.

Llegar a ser matemáticamente competente es un proceso largo y continuo que se afina durante toda la vida escolar, en la medida que los aspectos anteriores se van desarrollando de manera simultánea, integrados en las actividades que propone el maestro y las interacciones que se propician en el aula de clase. El maestro de matemáticas debe ser consciente de esto al planificar su enseñanza y al interpretar las producciones de sus estudiantes, pues sólo así logrará potenciar progresivamente en ellos las aptitudes y actitudes que los llevará a tener mejores desempeños en su competencia matemática. Las competencias matemáticas no son un asunto de todo o nada. (Nacional, 2004)

El desarrollo de la competencia matemática, implica utilizar -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones.

en definitiva el término competencia matemática, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

1.5. Función

Este concepto es tomado en la actualidad como uno de los referentes matemáticos de mayor relevancia dados sus variados aportes para modelar situaciones de las ciencias. Hogben (1970), Karlson (1961), Eves (1997), citados en Souza y Lanner 2003, afirman que:

> …la esencia del pensamiento de hoy es el concepto de función, o sea, el movimiento del pensamiento de hoy, se materializa en el concepto de función. La función representa el propio movimiento de la vida. Representa mucho de la realidad objetiva, llegando muchas veces a confundirse con ella.

Lo anterior invita a tener una aproximación histórica y epistemológica del concepto de función.

Las “funciones” han sido utilizadas, desde la antigüedad. Existen registros en los cuales se evidencia el estudio de algunos problemas que trataban con la variación continua, pero sólo desde un registro tabular. El matemático Oresme (1323 - 1382) utiliza el método gráfico para representar las latitudes de las formas. Ya hacia la edad moderna se hacen grandes aportes al concepto de función, por lo que se considera a este periodo como el período más fecundo para la formación de dicho concepto. Es en este período donde se evidencia notoriamente el papel de la variación y el cambio en el origen y desarrollo conceptual del concepto de función. Las representaciones simbólico-algebraicas sólo comienzan a tener sus raíces con los trabajos de François Viète (1540 – 1603). Tanto para Newton como para Leibniz, la función no era un objeto de estudio, sino un instrumento implícito de anticipación; siendo este último el primero en utilizar la expresión función. El desarrollo posterior del concepto de función se debe a Leonhard Euler (1707 - 1783), en su lntroductio in analysis infinitorum, texto dentro del cual lleva el concepto de función a un estudio tal como era, efectivamente, utilizado en análisis matemático; reconoció una clasificación de las funciones ya que afirmaba que la principal diferencia de las funciones consistía en la combinación de las variables y de las cantidades constantes que las forman. Por su parte Lagrange (1736 – 1813), en su teoría de las funciones analíticas, llama función a toda expresión del cálculo. Mientras que Condorcet (1743 – 1794), en uno de sus textos sobre funciones analíticas aporta los primeros cimientos para una nueva definición de las funciones, afirmando que:

> Supongo que tengo un cierto número de cantidades x, y, z, ..., F y que para cada valor determinados x, y, z,... etc., F tiene uno o varios valores correspondientes: yo digo que F es una función de x, y, z... [y agrega] en fin yo sé que cuando x, y z, estén determinadas, F lo estará también. Incluso, cuando no se conozca la manera de expresar F en x, y, z, ni la forma de la ecuación entre F y x, y, z yo sabré que F es función de x, y,. (Lacasta y Pascual, 42).

Baire en su artículo de 1899 “sobre las funciones de variables reales” escribe:

> La palabra función, que ha servido primitivamente para designar las diferentes potencias de una misma cantidad, ha tomado una significación cada vez más extensa hasta que Dirichlet ha dado a esta palabra el significado que se le atribuye hoy. La función existe desde que se imagina una correspondencia entre números, que conviene considerar como los estados de magnitud de una misma variable y, con otros números, todos distintos, que conviene considerar como los estados de magnitud de una misma variable x. (Baire citado en Lacasta y Pascual, 49-50)

Con base en la definición de Dirichlet citada anteriormente y la introducción de la teoría de conjuntos se constituye un nuevo nivel en el concepto de función que alcanza su máxima abstracción con el grupo Bourbaki, quienes con un lenguaje conjuntista proporcionaron la siguiente definición:

> Sean **E** y **F** dos conjuntos que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable **x** de **E** y un elemento variable **y** de **F** se llama una relación funcional, si para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, existe un único $\mathbf{y} \in \mathbf{F}$ que está relacionado con x en la relación dada. Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia con cada elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ el elemento $\mathbf{y} \in \mathbf{F}$ que está relacionado con **x** en la relación dada; llamamos a **y** valor de la función para el elemento **x**, y decimos que la función está determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan las mismas funciones. (Lacasta y Pascual, 52)

La definición de función en la actualidad se aparta de todas las características que estuvieron presentes en su génesis y evolución. Esta definición convierte a la función en un objeto matemático estático, aislado de los fenómenos de variación que estuvieron presente desde la antigüedad como simples descripciones corelacionales descritas en representaciones retóricas y tabulares, pasando desde la comprensión de fenómenos cuantificables representadas geométricamente por Oresme hasta las definiciones proporcionadas por Bernouilli y Euler, representadas en forma retórica, gráfica y analítica (simbólica).

Es así como un análisis epistemológico del concepto de función indica tener en cuenta las nociones de variación y cambio en el diseño de situaciones para la construcción del concepto en mención. Varias de estas sugerencias se han recopilado en documentos básicos de nuestro sistema educativo, como lo son los lineamientos curriculares de matemáticas MEN 1998 y los estándares básicos de calidad MEN 2003, para organizar las concepciones y prácticas educativas que dan sentido a la configuración del pensamiento variacional como fundamento del desarrollo del pensamiento matemático.

Lo antedicho lleva a resaltar una vez más la importancia de la presente investigación, para lo cual es conveniente puntualizar sobre aspectos relevantes en la construcción de la propuesta de intervención pedagógica; en primera instancia cabe recordar que Duval menciona que la conversión entre dos representaciones es congruente, si al segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones. Estos criterios son base fundamental para la elaboración y valoración de la propuesta dado que permitirán dar razón del avance o retroceso de los procesos en los estudiantes, aportando claridad en que aspecto de la congruencia se debe trabajar para fortalecerlo y así facilitar la comprensión del objeto matemático.

La visualización matemática demanda de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro. Trabajos sobre el papel que desempeñan los sistemas semióticos de representación en el aprendizaje de conceptos matemáticos, han dejado ver el valor de la articulación entre diversos sistemas de representación de los objetos. La comprensión del papel de los sistemas de representación nos permite vislumbrar cómo los estudiantes construyen conceptos matemáticos. En palabras de Duval (1993, 1995) "para diferenciar un objeto matemático de su representación es necesario que el estudiante represente ese objeto matemático, al menos en dos diferentes representaciones". Así pues, las aproximaciones visuales son vitales en la resolución de problemas. La visualización matemática se da de manera global, integradora, holística, articulando aspectos teóricos y experimentales sobre el desarrollo de los sistemas semióticos de representación.

Investigaciones sobre visualización matemática y el papel de las imágenes mentales han puesto de manifiesto la importancia de las representaciones matemáticas para la formación adecuada de conceptos. Janvier (1987); Kaput (1987 & 1991); Taghard (1991); Duval (1993 & 1995). "la estrella especie de iceberg" de Janvier permite analizar que no sólo es significativo fijarse en la representación como un elemento aislado (una esquina de una estrella), sino también, se precisa razonar que éstas (las representaciones) son elementos de un sistema semiótico (visto como un todo).

El aporte teórico de Duval muestra como la noesis exige la disponibilidad y uso de varios sistemas de representación semiótica, sus transformaciones sabiendo que estas pueden ser de dos tipos: tratamientos y conversiones, los cuales se consideran indispensables en la comprensión, desarrollo y apropiación de los objetos matemáticos.

Por último es importante recordar que como indican Godino y DÂmore (2007) “la semiosis (producción y aprehensión de representaciones materiales) no es espontánea y su dominio debe ser un objetivo de la enseñanza. Una atención particular debe darse a la conversión entre registros no congruentes entre sí”. Aspecto que es fundamental en la presente investigación y que se considera puntual en el desarrollo de la propuesta desde un enfoque ontosemiótico. Estos aspectos se explicitarán detalladamente en el capítulo correspondiente a la misma.

Nociones de marcos teóricos estudiados	**Interpretaciones en el enfoque ontosemiótico**
Teoría de situaciones	
Situación	Situación-problema
Conocimiento	Conocimiento, entendido como significados de objetos personales (sistemas de prácticas personales y sus configuraciones cognitivas asociadas)
Saberes matemáticos	Saberes, entendidos como significados de objetos institucionales (sistemas de prácticas institucionales y sus configuraciones epistémicas asociadas)
Modelo implícito /concepción	Concepción, entendida como significados de objetos personales (sistemas de prácticas y sus configuraciones cognitivas asociadas)
Sentido de un conocimiento	Sentido, entendido como significado parcial (subsistemas de prácticas)
Formas de conocimiento (ligadas a situaciones de acción, formulación, validación)	Diferentes configuraciones cognitivas ligadas a prácticas actuativas, comunicativas o argumentativas
Dialéctica Instrumento – Objeto	
Problema matemático	Situación – problema (que reúne ciertas condiciones)
Concepto – instrumento	Concepto entendido como objeto interviniente en un sistema de prácticas (principalmente operatorias)

Concepto –objeto	Concepto, entendido como objeto interviniente en un sistema de prácticas regulativas y discursivas (definiciones y propiedades del objeto en un contexto formal).
Marcos	Contextos matemáticos (geométrico, algebraico, etc.; atribuyen un significado parcial a los objetos)
Juego de marcos	Coordinación de significados parciales derivados de los contextos de uso.
Teoría Antropológica	
Tarea (problemática)	Situación – problema que desencadena una práctica
Praxeología u organización matemática(puntual, local, regional, global)	Configuración epistémica asociada a un sistema de prácticas operativas y discursivas y relativas a una clase de situaciones más o menos amplia
Praxis (tarea; técnica)	Prácticas operativas ligadas a un tipo de situaciones
Logos (tecnología; teoría)	Prácticas discursivas ligadas a campos de problemas
Transposición didáctica	Ecología de significados (entendidos como sistemas de prácticas)
Teoría de los campos conceptuales	
Concepto	Concepto, entendido como parte de una configuración cognitiva/ epistémica asociada a un sistema de prácticas
Campo conceptual	Campo conceptual, entendido como configuración epistémica global
Esquema	Esquema, entendido como significados de objetos personales (sistemas de prácticas y sus configuraciones cognitivas asociadas)
Concepto y teorema en acto	Concepto y teorema (entendidos como reglas), parte regulativa de la configuración cognitiva que se activa al realizar una práctica personal.
Sentido	Significado personal, entendido como sistema de prácticas personales ligadas a una clase de situaciones
Registros de representación semiótica	
Registros de representación	Tipos de lenguajes o medios de expresión ostensiva

Representación semiótica	Representación semiótica, entendida como configuración epistémica que participa como expresión o contenido en una función semiótica
Cambio de registros	Coordinación de significados parciales

Tabla 1 Comparación de algunas nociones teóricas de los enfoques analizados

Fuente: Elaboración propia

Como lo afirma Duval "Una función no es ni una estadística de valores ni una representación gráfica ni un conjunto de cálculos ni una fórmula, sino todo ello al mismo tiempo". (Duval, 1978. Citado por Vasquez, 2009). Por tanto, en el aprendizaje del concepto de función lineal, el estudiante debería poder diferenciar el concepto de sus representaciones y son las actividades de articulación entre diferentes registros las que favorecerían esta diferenciación como lo afirma Janvier

> El aprendizaje de las funciones se da siempre y cuando se desarrolle la capacidad del estudiante para interpretar y usar cada una de las representaciones del concepto de función. Así mismo la capacidad de traducción de uno a otro indica la comprensión del mismo (Janvier citado por García y otros, 1995) citado por (Gutiérrez, 2007).

2. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

2.1. Metodología didáctica de la propuesta

En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática reconocemos el papel importante que juegan las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la comprensión matemática (Contreras y Font, 2002; Font 2001; Font y Peraire 2001), pero adoptamos una posición antropológica sobre esta cuestión. Desde un punto de vista ontosemiótico, el problema no es si se debe introducir una sola representación de un objeto o más de una, ni qué traducciones o relaciones entre representaciones hay que tener en cuenta. El problema es realmente determinar si las representaciones introducidas promueven, o no, la realización de las prácticas que interesan que formen parte del significado global del alumno, en saber si aumentan o disminuyen la complejidad semiótica y también en saber si producen o no conflictos semióticos innecesarios. Godino (2007)

Como se concluyó en el marco teórico "la semiosis (producción y aprehensión de representaciones materiales) no es espontánea y su dominio debe ser un objetivo de la enseñanza. Una atención particular debe darse a la conversión entre registros no congruentes entre sí" Godino y DÂmore (2007), se plantea desde la implementación de una propuesta de intervención pedagógica proponer una serie de prácticas que permitan conseguir la apropiación de un objeto en el caso de esta investigación ***función***, para lo cual se han retomado los aspectos fundamentales del enfoque ontosemiótico EOS en el marco teórico permitiendo enmarcar la propuesta de intervención y dando paso a la explicitación de las condiciones generales que debe tener cualquier tipo de instrucción matemática entendida esta como un proceso de estudio dirigido, a esta le corresponden seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y afectiva (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemática desde el EOS a los procesos de enseñanza y aprendizaje constituidos, en los que participan ciertos sistemas de prácticas matemáticas (conocimientos institucionales), unos sujetos (estudiantes) cuyo compromiso es la apropiación personal de dichas prácticas, el profesor o director del proceso de instrucción y unos recursos o medios instruccionales; todo esto inmerso en dos faceta una epistémica y una semiótica.

2.1.1. Aspectos que intervienen en el EOS

Para la organización de la propuesta de intervención se hace indispensable clarificar aquellos términos que serán eje de la misma y profundizar en las dimensiones y características que mínimo deben contemplarse para propender por la aprehensión del objeto matemático de estudio ***función*** a través de las transformaciones como mecanismo generador de la comprensión del mismo. Por consiguiente se explicitan los tres componentes principales del EOS, faceta epistémica, faceta semiótica e interacción didáctica o instrucción matemática.

2.1.2. Faceta epistémica

Como se mencionó en el marco teórico se compone de varias dimensiones, pretende construir la naturaleza del objeto, por lo tanto en la propuesta de intervención es indispensable determinar la naturaleza del objeto *función*, para esto se refieren los componentes que van a permitir caracterizarlo, que deben estar presentes en la misma, relacionados por Godino y que se enuncian a continuación:

*Lenguaje: S*on los términos, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).

Situaciones: Son las aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios. Se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados

Procedimientos: Hace referencia a los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.

Conceptos: son todas aquellas definiciones, introducidas mediante descripciones: recta, punto, número, media, función.

Propiedades: Propiamente los enunciados sobre conceptos.

Argumentos: Aquellos enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo.

2.1.3. Faceta semiótica

En la teoría de las funciones semióticas propuesta por Duval se introduce la noción de significado personal para designar los conocimientos del estudiante. Estos significados son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los sistemas de prácticas operativas y discursivas que son capaces de realizar los estudiantes a propósito de un cierto tipo de problemas. Los significados personales se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales al comienzo del proceso, y alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos). Esto es lo que verdaderamente va a dar cuenta de la noesis y la semiosis del objeto ***función*** para lo cual es requisito que se tenga en cuenta en la propuesta que esta última se ve favorecida si se desarrolla por medio de tres procesos que son:

Representacional: Cuando un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito.

Instrumental: Si un objeto usa a otro u otros como instrumento.

Estructural: Cuando dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos

2.1.4. Interacción didáctica o instrucción matemática

Es esta faceta del EOS la que estructura a nivel didáctico la propuesta de intervención, en este se deben contemplar diversos componentes que van a dar cuenta del proceso de enseñanza aprendizaje del objeto función, sin desligarse de las facetas mencionadas anteriormente para que se pueda visualizar como un todo. Estos componentes son relacionados por Godino (2007):

Las interacciones sistemas de prácticas: Todo tipo relación que se establezca entre dos o más objetos didácticos, bajo la condición de ser establecidos bajo un proceso de instrucción. Son de diferente carácter como indican Godino y Batanero (2007) así:

Epistémica*:* Como se va organizando el conocimiento del objeto ***función*** en el proceso Se distinguen en ella seis estados posibles, respecto a la característica del subsistema del objeto que se estudia en cada momento. E1: Situacional: se muestra un ejemplo de un cierto tipo de problemas. E2: Actuativo: se emprende el proceso para resolver los problemas. E3: Lingüístico: se hacen manifiestas las notaciones, representaciones gráficas, etc. E4: Conceptual: se enuncian o dilucidan definiciones del objeto. E5: Proposicional: se exponen y aclaran las propiedades del objeto. E6: Argumentativo: se verifican las tareas acogidas o las propiedades expuestas.

Docente: Se habla de la secuencia de actividades que ejecuta el profesor durante el proceso de estudio de un contenido o tema matemático; si estas se enmarcan en una situación-problema específica se habla de 'configuración docente' y se asocia a la configuración epistémica. Estas tareas son la forma en que el docente desafía las situaciones problema, se organizan así:

Planificación: comprende el diseño del proceso, la selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).

Motivación: Acciones para generar un clima de afectividad, respeto, y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que se involucre en el proceso de instrucción.

Asignación de tareas: Busca la dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.

Regulación: Es la fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista.

Evaluación: Proceso de observación y valoración del momento del aprendizaje logrado en períodos críticos (inicial, final y durante el proceso) y cómo se da la resolución de las dificultades individuales observadas.

Investigación: Es la reflexión y análisis del desarrollo del proceso para propiciar cambios en futuras ejecuciones del mismo, así como la articulación de diversos momentos y fracciones del proceso de estudio.

Estudiante: Se refiere al sistema de funciones/acciones que desempeña un alumno a propósito de una configuración epistémica. A continuación se citan algunas que se espera sean evidenciables por parte del estudiante durante la construcción del concepto función:

Aceptación del compromiso educativo: Adopción de una actitud positiva al estudio y de cooperación con los compañeros.

Exploración: Indagación, búsqueda de posibles formas de responder a las situaciones problema planteadas.

Recuerdo: Paráfrasis y rastreo de reglas (conceptos y proposiciones) y del significado de los componentes lingüísticos en cada situación.

Formulación/comunicación de soluciones: Se plantan frente a tareas planteadas por el docente o por cualquier otro compañero.

Argumentación: Es la manera de exponer y defender sus ideas frente al docente o los compañeros.

Recepción de información: Busca datos sobre maneras de hacer, describir, nombrar, validar.

Demanda de información: Cuando el estudiante solicita al docente o a otros compañeros colaboración porque no entiende o no recuerda conceptos y procedimientos.

Ejercitación: Cuando ejecuta acciones rutinarias para dominar las técnicas específicas.

Evaluación: Momentos y disposiciones para realizar pruebas de evaluación presentadas por el profesor, o de autoevaluación y coevaluación.

Mediacional: Se emplean como medios de apoyo al proceso, incluye medios de presentación de la información en clase (pizarra, retroproyector, etc.), dispositivos de cálculo y graficación (calculadoras, ordenadores), materiales manipulativos, etc.

Cognitiva: Cuando se realiza la configuración del objeto ***función*** y procesos matemáticos, se comprende o sabe un objeto matemático ***función***, se refiere al proceso de cronogénesis.

Emocional: Son aquellos factores que condicionan el proceso de instrucción que aceptan diferentes estados y se modifican a medida que pasa el tiempo se relacionan con los estados emocionales (interés, compromiso personal, sentimientos de autoestima, aversión, etc.). Comprende el proceso de devolución que responde a la necesidad de que los estudiantes tomen como suyas las situaciones-problemas que el docente propone como medio para la construcción del conocimiento matemático.

La configuración didáctica: Es la *s*ecuencia interactiva de etapas de los recorridos que se presentan por una situación problema. Es la estructura organizacional y relacional del proceso de instrucción matemática. Una configuración didáctica lleva inscrita una configuración epistémica, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del docente, de los estudiantes o divididas entre ellos; esta permite el análisis del proceso enseñanza aprendizaje del objeto ***función*****;** estas relaciones se presentan de diversas maneras:

Dialógica: Desde un estudio y preparación previa el docente propone un diálogo contextualizado con el fin es el desarrollo de la noción de ***función*** (configuración didáctica dialógica.), busca que el estudiante pueda explicar y describir con otros as palabras el objeto.

Personal: El docente permite que el estudiante sea el actor principal de su proceso en la construcción y comunicación del conocimiento del objeto función espera que estos estén en capacidad de reconocer el objeto dado en la situación modelizada y descontextualizarlos para la construcción del significado de ***función*** esperado.

Magistral: El docente busca favorecer un aprendizaje constructivista: el estudiante mediante la situación y en interacción con el docente, hacen evolucionar el significado personal atribuido a la noción de ***función*** (producto del proceso de estudio personal) y consiguen un ajuste muy próximo al significado institucional deseado.

A-didáctica: Hace referencia al CDC del profesor.

La dimensión normativa: Comprende el Sistema de reglas, hábitos, normas que circunscriben y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, abarca la idea de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del resultado de las normas y meta-normas que actúan en los diferentes aspectos del proceso, se considera como el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos. Involucra varias dimensiones como son:

Cronogénesis: Se encarga de controlar tiempos didácticos para los diversos elementos del sistema. Comprende: El tiempo didáctico, permite planificar la duración temporal de las numerosas actividades docentes y discentes que se dan en un proceso de estudio. El tiempo de aprendizaje, se define como el tiempo que el estudiante necesita en realidad para alcanzar los objetivos de aprendizaje concernientes a un contenido determinado. Es diferente para cada estudiante.

Contrato didáctico: Es la ejecución de una serie de factores de interacción, regularidades que se instauran con frecuencia de forma inconsciente, reducen la incertidumbre y resuelven los conflictos semióticos.

La idoneidad didáctica: es el resultado de la interacción de los anteriores componentes y dimensiones del proceso de instrucción si se articulan permiten identificar conflictos y negociación de significados. Se estipulan cinco criterios de idoneidad que se relatan a continuación:

Idoneidad epistémica: Nivel de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia. Además incluye los vínculos o apertura hacia otras configuraciones epistémicas que componen la trayectoria correspondiente.

Idoneidad cognitiva: Nivel de proximidad de los significados efectuados respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes.

Idoneidad semiótica: Posibilidades de una configuración didáctica para reconocer conflictos semióticos potenciales y de resolverlos mediante la negociación de significados.

Idoneidad ecológica: Nivel de ajuste entre el proceso, el proyecto institucional y el social, y a los limitantes del entorno en que se desarrolla.

Idoneidad mediacional: Nivel de disponibilidad de los recursos materiales y temporales requeridos para el desarrollo de la actividad.

Idoneidad emocional: Nivel de interés y motivación del estudiante en el proceso.

Todos y cada uno de estos aspectos se ha tenido en cuenta en el diseño, implementación, evaluación y ajuste de la propuesta de intervención relacionándolos e incluyéndolos en los aspectos que se describen en la categoría referente a los sistemas de representación y a las transformaciones que se suceden entre ellos, recordando que éstas pueden ser de dos tipos: tratamientos y conversiones, para lo cual se elabora una matriz que permite relacionar y valorar el nivel de comprensión y apropiación del objeto función por parte de los estudiantes.

2.1.5. Matriz categorial de tratamiento

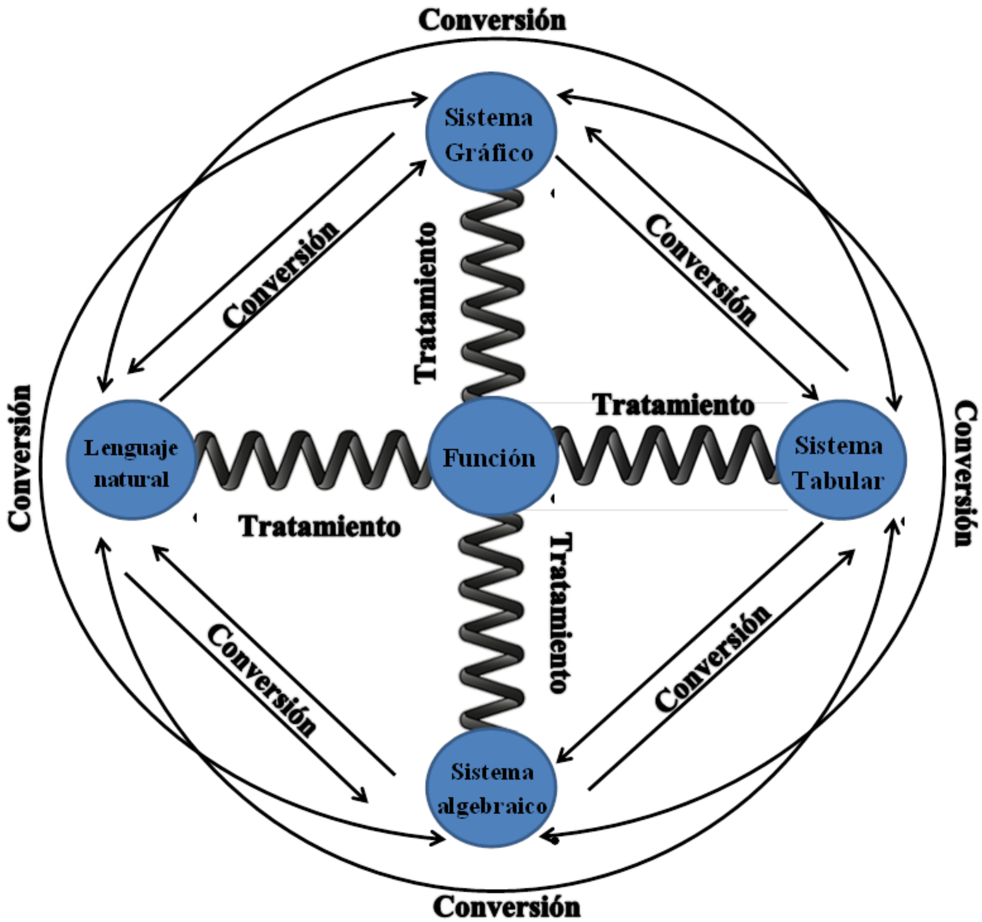
Para el desarrollo de la presente propuesta se ha generado una matriz categorial (ver apéndice A) que relaciona los niveles de comprensión con cada uno de los sistemas de representación de una función de tal manera que permite caracterizar el nivel en que se encuentra cada estudiante y así poder determinar cuáles son sus fortalezas y debilidades con respecto a la comprensión entre los tratamientos en cada sistema de representación de una función.

2.1.6. Matriz categorial de conversión

Para el desarrollo de la presente propuesta se ha generado una matriz categorial que caracteriza las conversiones entre sistemas de representación de una función (ver apéndice C), de tal manera que permite medir el alcance en las conversiones en que se encuentra cada estudiante y así poder determinar cuáles son sus fortalezas y debilidades con respecto a la comprensión entre los cambios en los sistemas de representación de una función.

2.2. Estructura de la propuesta de intervención

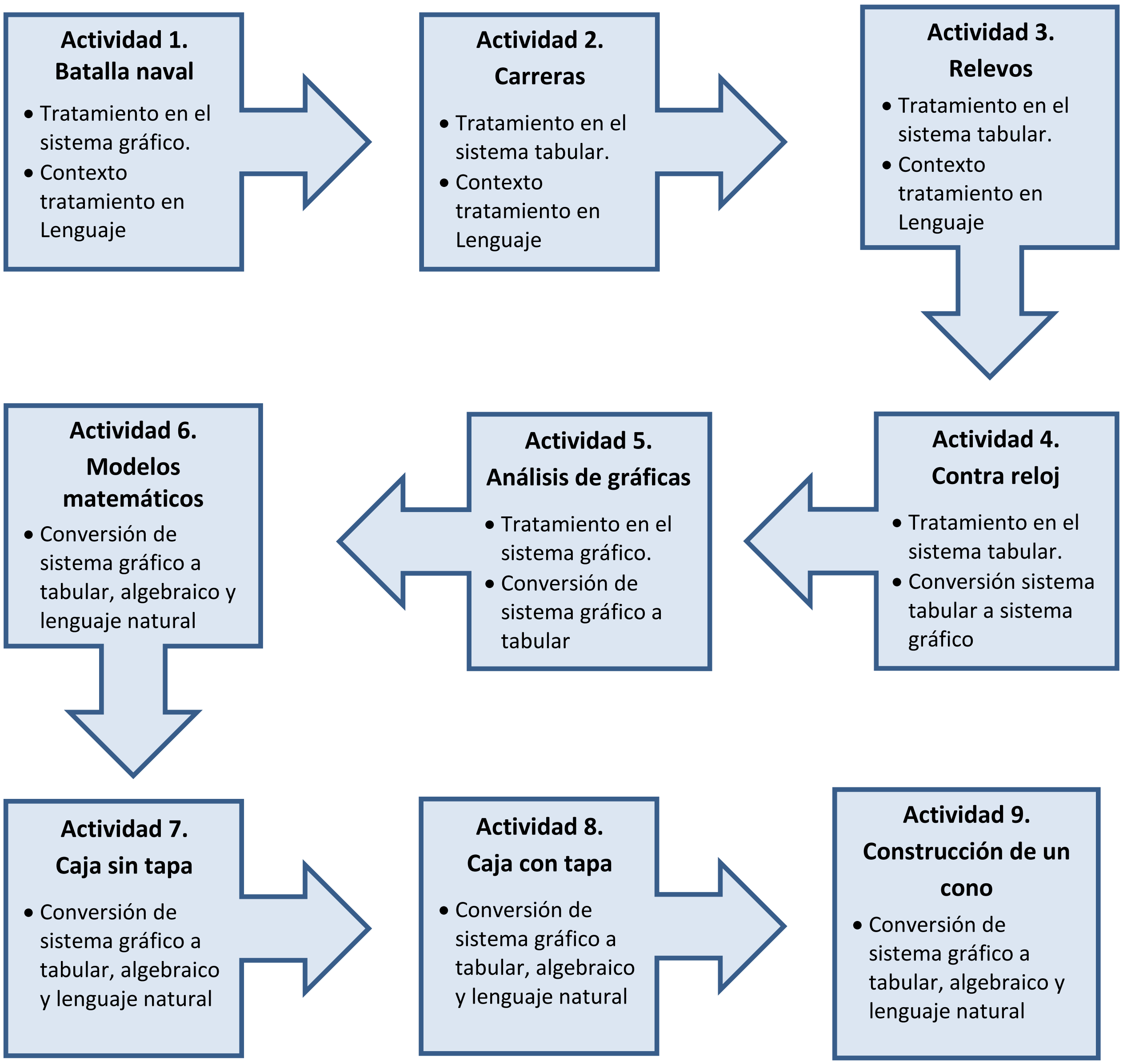
Las anteriores categorías y sus relaciones sirven de base y de insumo para determinar la estructura de la propuesta de intervención que se representa en la siguiente gráfica:



Gráfica 1 Estructura de la propuesta de intervención

2.3. Ruta de Implementación

La propuesta de intervención está formada por 9 actividades (ver apéndice D) y cada una de ellas en su estructura general de razón de los aspectos que se indican desde el EOS, además que presentan estrategias que buscan la adquisición de las transformaciones entre los diversos sistemas de replantación para el objeto ***función*** y por ende lograr la apropiación de este objeto matemático por parte de los estudiantes. A continuación, se muestra la ruta de implementación de la propuesta de intervención.



Gráfica 2 Ruta de implementación de la propuesta de intervención

3. Conclusiones

3.1. Resultados de la aplicación

3.1.1. Sistema de representación lenguaje natural

Una vez aplicada la propuesta didáctica se encuentra que:

	Niveles de comprensión											
	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Nivel 5		No contestan	Total
	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA		
Lenguaje natural	Fonología Morfología Reglas gramaticales de la lengua	Prueba diagnostico 30%	Reconoce variables, regularidades e invariantes en una situación Dar sentido al enunciado	Prueba diagnostico 17,5%	Actos locutivos Función discursiva Función metadiscursiva Sinonimia Paráfrasis	Prueba diagnostico 22,5%	Actos ilocutivos Apofántica Relaciona el objeto con sus propiedades	Prueba diagnostico 17,5%	Perlocutus	Prueba diagnostico 12,5%	0,0%	100,0%
		Prueba salida 10%		Prueba salida 18,3%		Prueba salida 34,6%		Prueba salida 21,3%		Prueba salida 15,8%	0,0%	100,0%

Tabla 2 Sistema de representación lenguaje natural y sus tratamientos

Se fortalecieron aspectos como la fonología, morfología; es decir hacen una buena lectura de los símbolos implementando reglas gramaticales del idioma la interpretación de la información explicita e implícita, desplazando más del 70% de los 40 estudiantes a partir del nivel 3 al nivel 5, lo que permite caracterizarlos en un punto más alto del tratamiento del lenguaje natural y esto a su vez permite convertir del lenguaje natural al lenguaje algebraico, gráfico o tabular de una forma directa. Las lecturas al iniciar las clases así como una rutina de las mismas generan el hábito de buscar y relacionar información, como lo muestra la imagen 1, las oraciones y la caligrafía son más claras, dando razón de un contexto y la compresión parcial o total del enunciado.

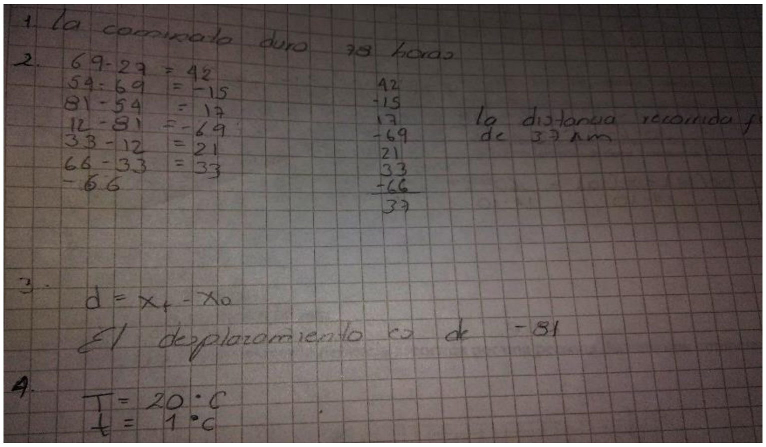
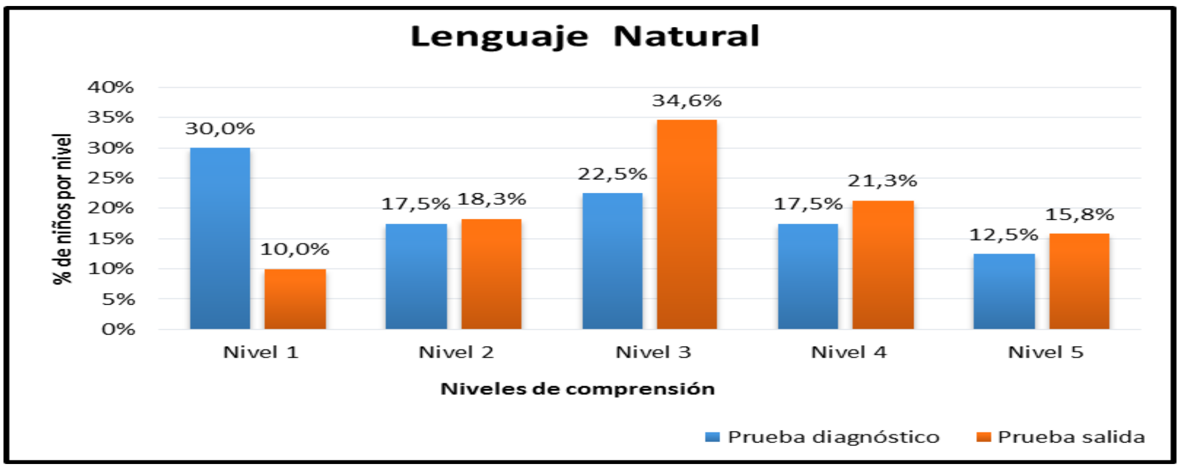
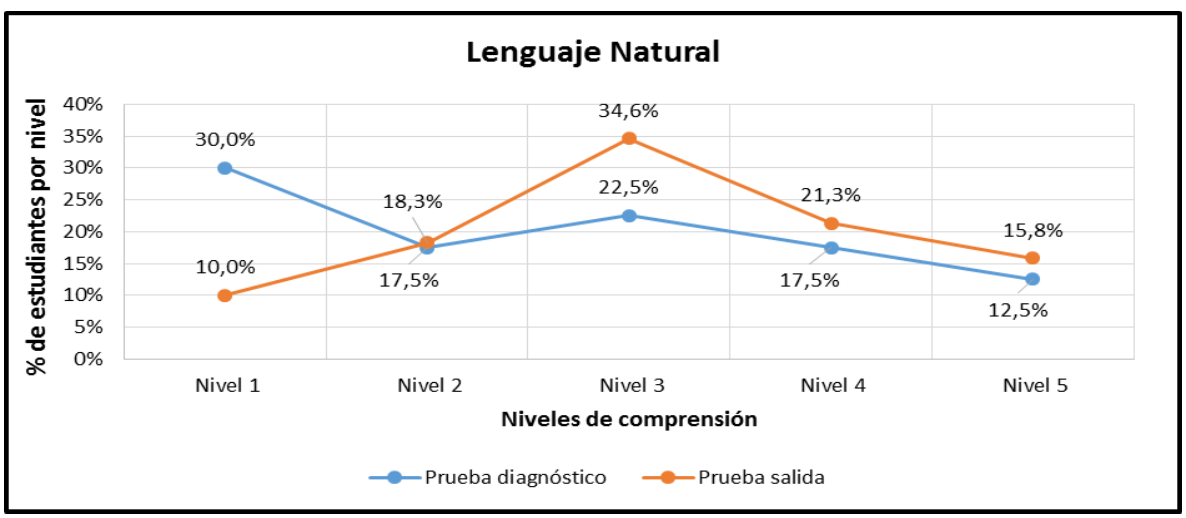


Imagen 1 Transformación entre los sistemas de representación gráfico-tabular y gráfico - lenguaje natural





3.1.2. Sistema de representación gráfico

	Niveles de comprensión											
	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Nivel 5		No contestan	Total
	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA		
Gráfico	Reconoce el plano cartesiano como sistema de representación gráfico Establece escalas en los ejes del plano	Prueba diagnostico 47,5%	Ubica las parejas ordenadas coordenadas	Prueba diagnostico 0,0%	Reconoce cambios de escala en los ejes	Prueba diagnostico 0,0%	Realiza la gráfica de una función a partir de su representación algebraica	Prueba diagnostico 0,0%	Interpreta la información representada en la gráfica de una función	Prueba diagnostico 0,0%	52,5%	100,0%
		Prueba salida 22,8%		Prueba salida 29,8%		Prueba salida 0,0%		Prueba salida 0,0%		Prueba salida 47,4%	0,0%	100,0%

Tabla 3 Sistema de representación gráfico y sus tratamientos

Se encuentra en esta representación y sus posibles transformaciones a otros sistemas que se pasa de un sesgo a derecha con concentración en un único nivel de un 49,7% de los 40 estudiantes a un aumento en niveles en los que no se encontraba ningún estudiante modificando la distribución en forma; es claro que la falta de práctica o el desconocimiento de algunas propiedades dificulta el proceso de transformación. El avance en este sistema de representación gráfico fue muy significativo, mejorando aspectos como el reconocimiento de los elementos de la gráfica (ejes, rótulos, segmentos, curvas), manejo de escalas **imagen 2**Imagen 2 en la cual completa las escalas en los ejes coordenados; ubicación de puntos en el plano y la interpretación de la información. Donde responde a las preguntas partiendo de la información de la gráfica. En la **imagen 3** se evidencia que no se logró llegar a un punto muy importante en las transformaciones que involucran este sistema de representación que es el transformar la ecuación en una gráfica en la cual se encuentra la ubicación de los puntos pero no se entiende la unidad de los puntos como una curva continua si no como una secuencia de puntos discretos, esto a su vez le dificulta generar el concepto de **dominio** o conjunto de valores válidos para las variables.

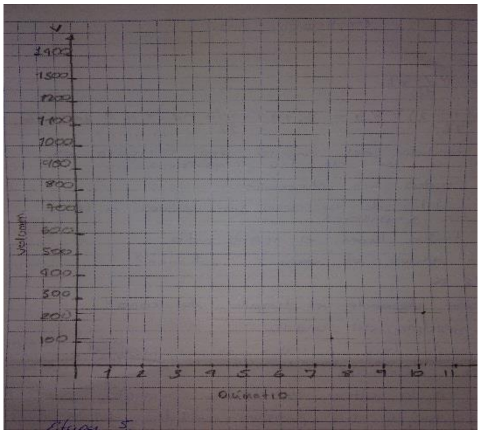


Imagen 2 Conversión en el sistema gráfico

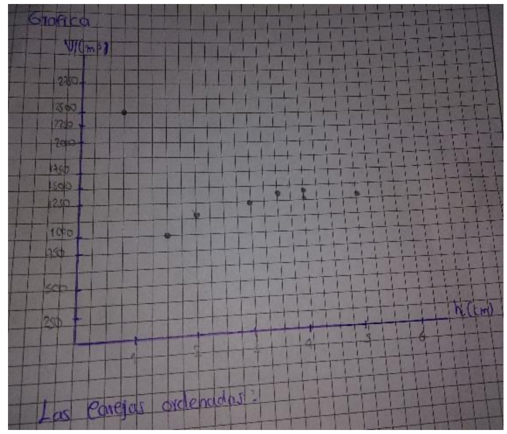
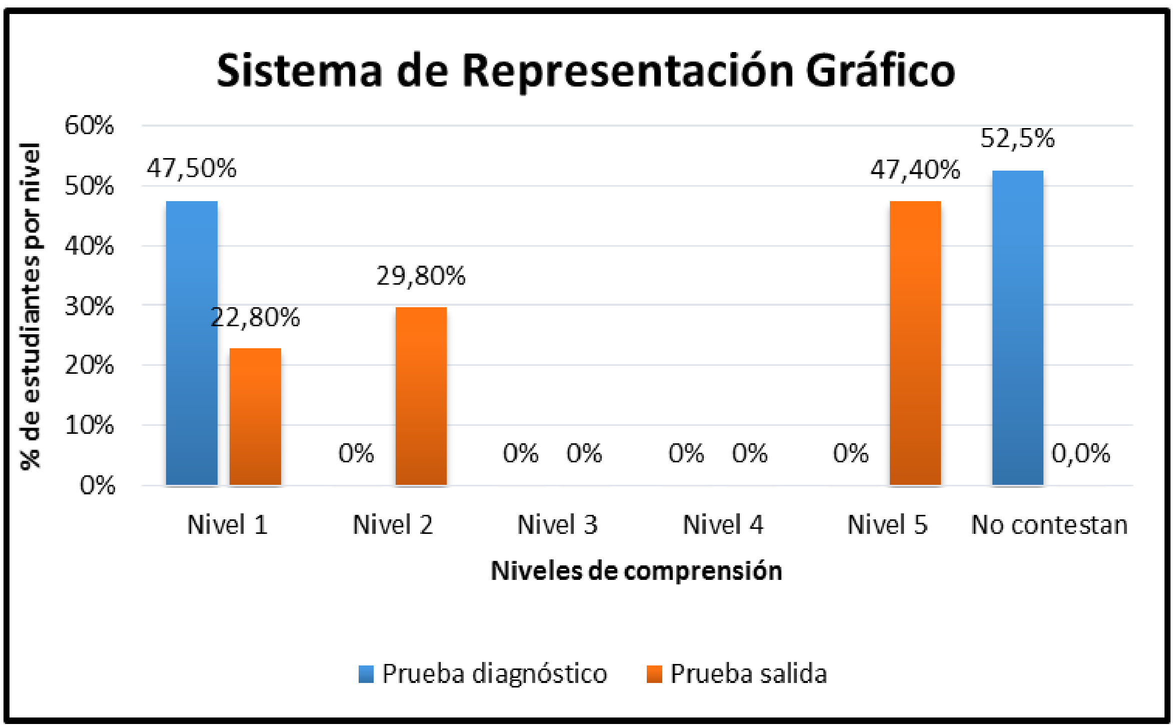
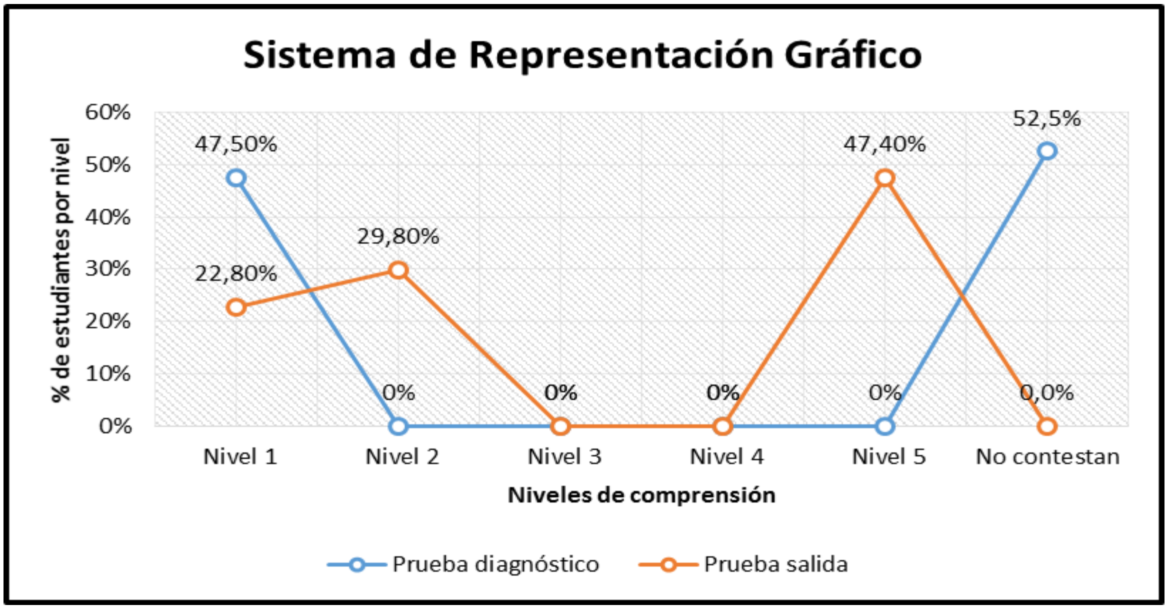


Imagen 3 Conversión en el sistema gráfico

Dentro de los resultados se debe destacar la dificultad que se presenta en la conversión del sistema gráfico al sistema algebraico, es decir transformar una gráfica en ecuación, esto se debe a la baja relación que establecen los estudiantes entre los modelos y sus representaciones gráficas, las cuales son para ellos elementos independientes no solo en forma, sino también en escritura y propiedades.





3.1.3. Sistema de representación algebraico

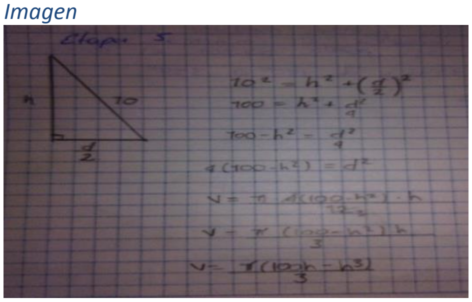
	Niveles de comprensión											
	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Nivel 5		No contestan	Total
	DESCRIPCIÓN	FRECUENCIA	DESCRIPCIÓN	FRECUENCIA	DESCRIPCIÓN	FRECUENCIA	DESCRIPCIÓN	FRECUENCIA	DESCRIPCIÓN	FRECUENCIA		
Gráfico	Reconoce el plano cartesiano como sistema de representación gráfico Establece escalas en los ejes del plano	Prueba diagnostico 47,5%	Ubica las parejas ordenadas coordenadas	Prueba diagnostico 0,0%	Reconoce cambios de escala en los ejes	Prueba diagnostico 0,0%	Realiza la gráfica de una función a parir de su representación algebraica	Prueba diagnostico 0,0%	Interpreta la información representada en la gráfica de una función	Prueba diagnostico 0,0%	52,5%	100,0%
		Prueba salida 22,8%		Prueba salida 29,8%		Prueba salida 0,0%		Prueba salida 0,0%		Prueba salida 47,4%	0,0%	100,0%

Tabla 4 Sistema de representación algebraica y sus tratamientos

En la tabla comparativa de resultados encontramos un cambio respecto a la prueba de entrada ubicando más del 50% de los 40 estudiantes en los niveles 4 y 5 en el cual aparecen las primeras etapas del pensamiento variacional desde su representación algebraica, reconocimiento de variables, relaciones y propiedades de objetos.

La teoría muestra que el reconocimiento de los símbolos de escritura formal así como la sintaxis de los mismos, las operaciones con los elementos dentro de este sistema y las relaciones explicitas e implícitas entre ellos es uno de los últimos niveles; como se ve en las **imágenes 4 y 6**; y da a quien las manipule adecuadamente una herramienta que partiendo de la teoría, parámetros y condiciones de una situación particular pueda generalizar o modelar y tomar decisiones. Las **imágenes 4 y 5** dan ejemplos de modelos algebraicos que relacionan variables mediante propiedades métricas o geométricas.

Imagen



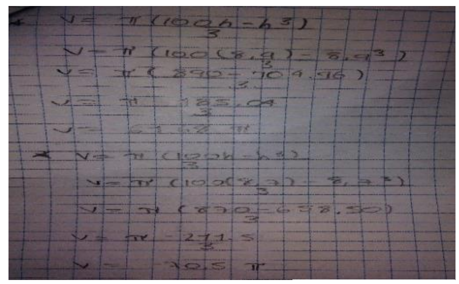


Imagen 4 Conversión en el sistema de representación algebraico

Se encuentra que uno de los problemas con más frecuencia es que no se reconocen los símbolos (variables, operadores, relaciones de orden o equivalencia, signos de agrupación); operaciones (suma, multiplicación y las que de estos se derivan), es decir se carece de forma parcial o total de un pensamiento variacional.

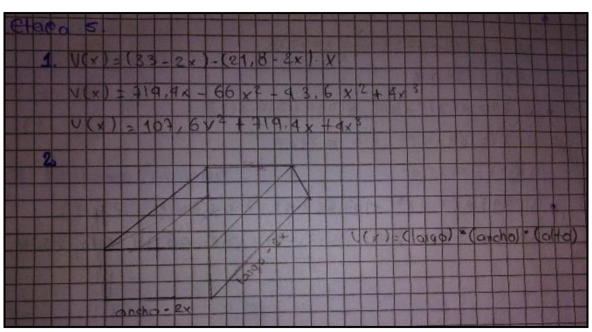
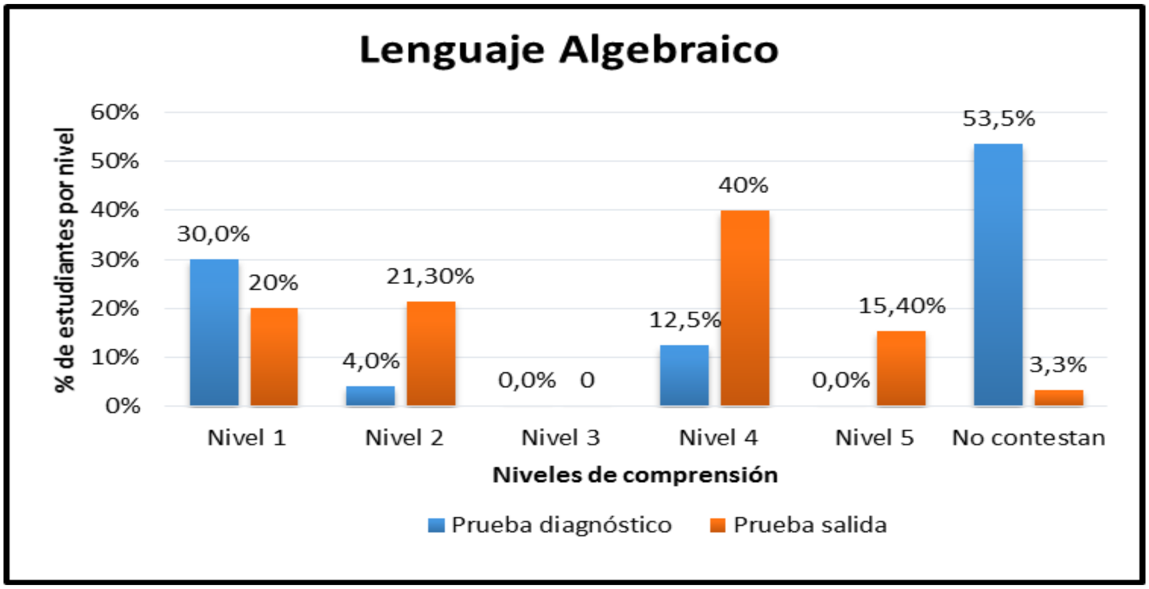
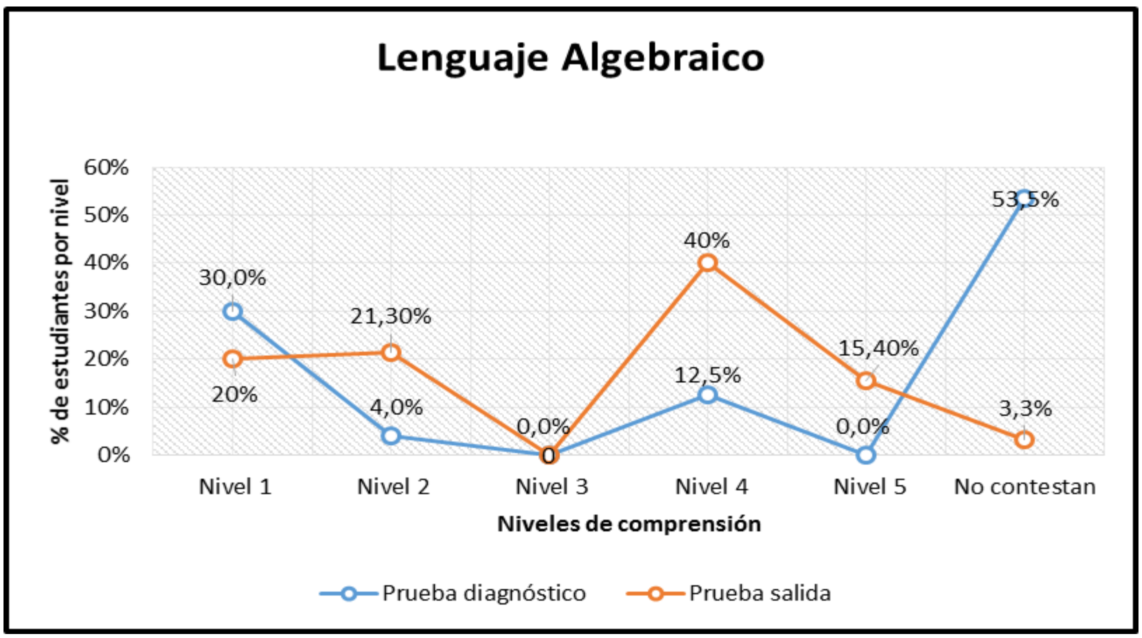


Imagen 5 Transformación entre los sistemas de representación lenguaje natural –gráfico-algebraico


Lenguaje Algebraico
% de estudiantes por nivel
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
30,0%
20%
4,0%
21,30%
0,0%
0
12,5%
40%
0,0%
15,40%
53,5%
3,3%
Nivel 1
Nivel 2
Nivel 3
Nivel 4
Nivel 5
No contestan
Niveles de comprensión
Prueba diagnóstico
Prueba salida


Lenguaje Algebraico
% de estudiantes por nivel
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
30,0%
20%
21,30%
4,0%
0,0%
0
40%
12,5%
15,40%
0,0%
53,5%
3,3%
Nivel 1
Nivel 2
Nivel 3
Nivel 4
Nivel 5
No contestan
Niveles de comprensión
Prueba diagnóstico
Prueba salida

3.1.4. Sistema de representación tabular

Sin duda alguna esta es la representación en la que la población tuvo una mejora sustancial, pasó de tener niveles en 0 a una distribución continua con sesgo a izquierda, lo cual pone al grupo con integrantes en todos los niveles, y a más de 72% de los 40 estudiantes en los niveles 4 y 5; generando habilidades que les ayudan a realizar conversiones de tablas en gráficos y ecuaciones.

	Niveles de comprensión											
	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Nivel 5		No contestan	Total
	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA	DESCRICIÓN	FRECUENCIA		
Tabular	Lee información presentada en arreglos rectangulares	Prueba diagnostico 77,5%	Asocia la correspondencia de valores a una pareja ordenada	Prueba diagnostico 22,5%	Encuentra la razón de diferencia de una columna a otra	Prueba diagnostico 0,0%	Construye tablas de datos a partir de una expresión algebraica	Prueba diagnostico 0,0%	Construye tablas de datos a partir de una gráfica	Prueba diagnostico 0,0%	0,0%	100,0%
		Prueba salida 5%		Prueba salida 8,7%		Prueba salida 13,7%		Prueba salida 40%		Prueba salida 32,6%	0,0%	100,0%

Tabla 5 Sistema de representación tabular y sus tratamientos

En la **imágenes 7, 8 y 9** se manifiesta la conversión del sistema gráfico al tabular, la interpretación de las variables, unidades, relaciones y covariación. Asocian a cada punto en la gráfica una y solo una pareja ordenada. No confunden las unidades y utilizan los símbolos apropiados para el sistema.

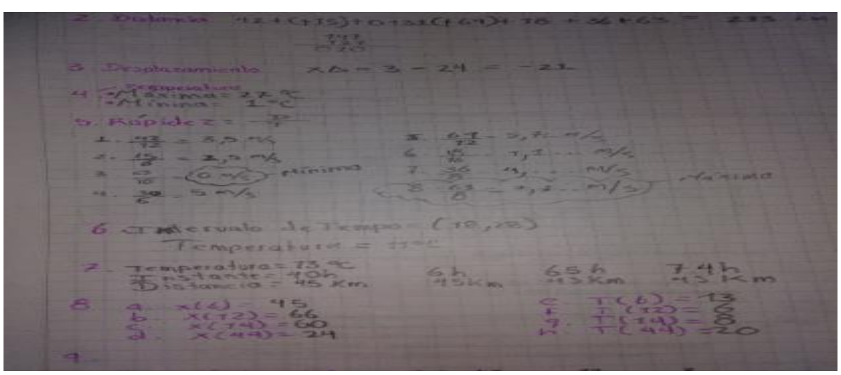


Imagen 6 Transformación entre los sistemas de representación lenguaje natural-tabular-algebraico

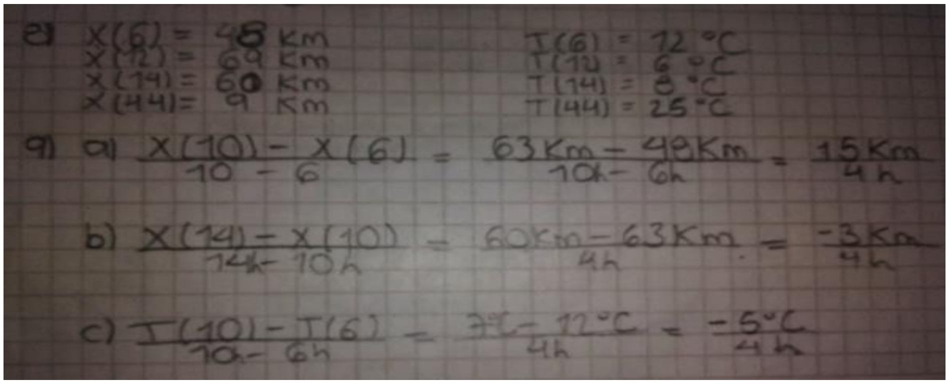


Imagen 7 Conversión en el sistema de representación tabular (8) nivel 2, (9) nivel 3

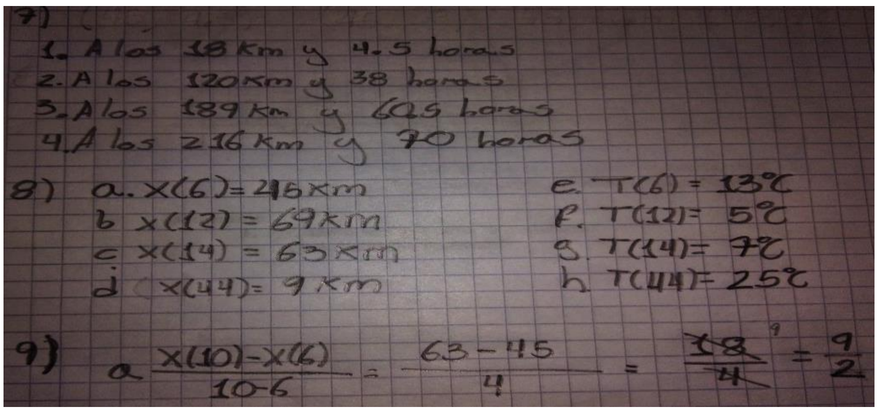
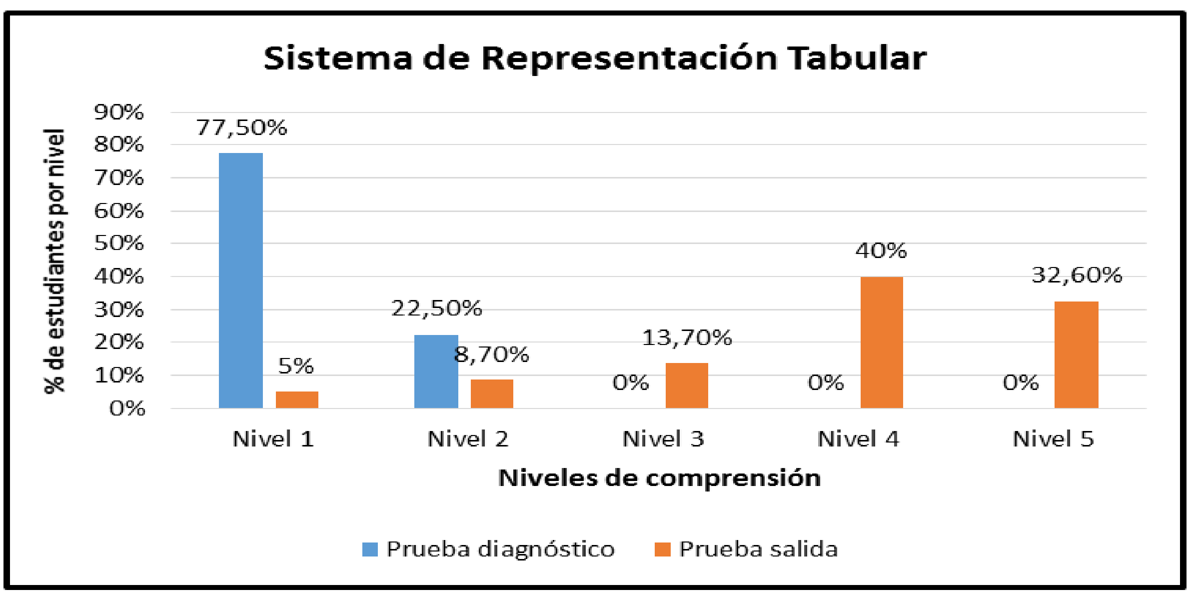
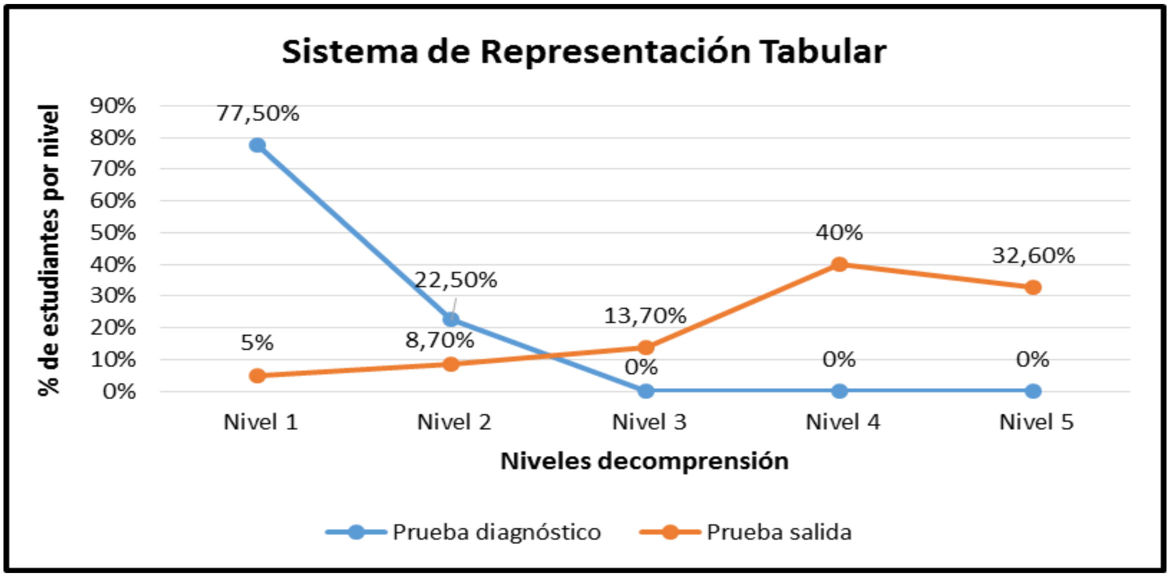


Imagen 8 Conversión en el sistema de representación tabular nivel 5





3.2 Aportes y conclusiones

Una vez implementada la propuesta de intervención se establecen las conclusiones con respecto a las tres tareas que enmarcan la presente investigación, los avances que propenden por la apropiación del concepto de función a través de la comprensión de las transformaciones entre los sistemas de representación.

Con respecto a la r**evisión documental,** el hecho de encontrar pocas investigaciones en las transformaciones entre sistemas de representación de la función, nos condujo a autores reconocidos como Raymon Duval y Juan Godino, de quienes tomamos el Enfoque Ontosemiótico, que repercute en procesos como toma de decisiones, interpretación y análisis de información, expresadas en diferentes sistemas.

Como fruto de esta revisión se desarrollaron dos instrumentos que permiten categorizar cada uno de los sistemas de representación semiótica de la función, los niveles de comprensión, a través de dos matrices categoriales en las cuales se expresan de forma clara, las manifestaciones que permiten identificar el nivel de comprensión de los estudiantes en cuanto al tratamiento en cada sistema de representación; ver apéndice A y la segunda permite identificar las conversiones, su nominación según Janvier (1978) y los niveles de comprensión en cada una de acuerdo con Duval (2004) y Kieran (2008); ver apéndice C.

Ubicar a cada individuo en un nivel específico de comprensión, tanto en el tratamiento como en la conversión, muestra las fortalezas y debilidades en las que se debe trabajar para avanzar en la adquisición del concepto función. Siendo este el aporte científico dado en esta investigación. Con estos instrumentos el docente de matemáticas puede tomar la propuesta didáctica de este trabajo o elaborar una propia, adaptándola a las necesidades particulares de su contexto.

En lo que concierne a la **propuesta didáctica** es necesario generar un instrumento que categorice la variable y sus diferentes componentes o elementos que la modifican tanto en intensidad como en amplitud.

La propuesta didáctica es la herramienta que según los resultados obtenidos permite una intervención directa en el aula, siendo susceptible a modificaciones y ajustes acordes a la teoría y las necesidades.

Referente a la tarea **evaluar el proceso** se evidencia la necesidad de analizar cada tema, ya que en este proceso se encuentran las relaciones directas e indirectas de cada variable que intervienen en el proceso enseñanza aprendizaje.

Por otra parte se denota que los conceptos son más asimilables al tener un contexto, entendido este como una aplicación.

Bibliografía

Angulo, & Celorio, J. (2012). *Una Secuencia Didáctica.* Recuperado el 8 de Octubre de 2016, de Funes: Angulo y Celorio, J. y. (2012). http://funes.uniandes.edu.co/. Recuperado el 3 de octubre de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/: http://funes.uniandes.edu.co/2524/1/UnasecuenciaAnguloAsocolme2012.pdf

Balaguera, R. (2000). INVESTIGACIÓN EN EL AULA. *Informática Educativa UNIANDES - LIDIE, 13*(2), 202-209.

Caicedo, Y. A., & Otros. (2013). "Juegos de rol como mediación educativa¨. *Matematica Educativa 13 Encuentro Colombiano.*

Castro de Bustamante, J. (2007). La investigacion en educación matemática una hipotesis de trabajo. *Educere*, 519-531.

Castro de Bustamante, J. (2007). *Scielo.* Recuperado el 15 de Agosto de 2016, de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102007000300019&lng=es&tlng=es

Caucali Mayorga, N. (Marzo de 2016). *Análisis del estado del desarrollo de las competencias de los estudiantes del gradonoveno en el área de matemáticas del Colegio Distrital Ciudadela Educativa de Bosa.* Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de Unilibre: http://repository.unilibre.edu.co/handle/10901/8278

Caucali, M. N. (Marzo de 2016). Análisis del estado del desarrollo de las competencias de los estudiantes del grado noveno en el área de matemáticas del colegio distrital ciudadela educativa de bosa. bogota: universidad libre.

Caucali, N. (Marzo de 2016). *Análisis del estado del desarrollo de las competencias de los estudiantes del gradonoveno en el área de matemáticas del Colegio Distrital Ciudadela Educativa de Bosa.* Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de Unilibre: http://repository.unilibre.edu.co/handle/10901/8278

DECRETO 1860 de 1994. (5 de Agosto de 1994). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de Diario Oficial No 41.473: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-172061_archivo_pdf_decreto1860_94.pdf

DECRETO 1002 de 1984. (18 de Mayo de 1984). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de DIARIO OFICIAL 36615: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-103663_archivo_pdf.pdf

DECRETO 080 de 1974. (11 de Marzo de 1974). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de DIARIO OFICIAL 34038 : http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-104657_archivo_pdf.pdf

DECRETO 45 de 1962. (25 de Enero de 1962). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de DIARIO OFICIAL 30704: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-103679_archivo_pdf.pdf

Elliot, J. (2000). *La investigación-acción en educación.* Recuperado el 26 de Octubre de 2016, de http://www.cimm.ucr.ac.cr/wordpress/wp-content/uploads/2010/12/Elliot-J.-Investigaci%C3%B3n-acci%C3%B3n-2002.pdf

Estándares Básicos de Compentecias. (2006). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de MIniterio de educacion nacional: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Fals Borda, O. (2002). Tensiones, Análisis Político.

Fiallo Leal, J. (2015). Acerca de la investigación en educación matemática desde las tecnologías de la información y la comunicación. *Actualidades Pedagógicas*(66), 69-83. doi:http://dx.doi.org/10.19052/ap.3436

García Rodríguez, M. L. (s.f.). *repositoriodigital.ipn.mx.* Recuperado el 14 de Agosto de 2016, de http://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/3884/Nuevos_ambientes_de_aprendizaje_de_las_matematicas_apoyados.pdf?sequence=1

Garcia Rodriguez, M., & Benítez Pérez, A. (2010). El Uso de Multiples representaciones como una estrategia para el aprendeizage de conceptos matemáticos. *ASIME*.

García y Benítez, M. y. (2011). *repositoriodigital.ipn.mx.* Recuperado el 14 de Agosto de 2016, de http://www.scielo.cl/pdf/formuniv/v4n3/art05.pdf

Godino D., J. B. (Octubre de 2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros.* Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de Proyecto Edumat-Maestros: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como. *perspectiva de la didáctica de las matemáticas como.*

GOMEZ, B. W. (2011). *Algunas herramientas de la interdisciplinariedad para la Comprensión del concepto de función lineal.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

Gómez, W. (7 de Junio de 2011). Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de http://www.bdigital.unal.edu.co/: http://www.bdigital.unal.edu.co/4944/1/GomezBelloWilson.2011.pdf

Gómez, W. (7 de Junio de 2011). Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de http://www.bdigital.unal.edu.co/: http://www.bdigital.unal.edu.co/4944/1/GomezBelloWilson.2011.pdf

Henao, M., & Otros. (2013). *ayura.udea.edu.co.* Recuperado el 15 de agosto de 2016, de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1777/1/JC0793.pdf

LEY 115 de Febrero 8 de 1994. (8 de Febrero de 1994). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

LEY 30 de Diciembre 28 de 1992. (28 de Diciembre de 1992). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de Ministerio de Educacion Nacional: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-86437_Archivo_pdf.pdf

Londoño, J. A., & Aldana, E. (2013). *Matematica Educativa 13 Encuentro Colombiano.* Obtenido de Desarrollo de competencias matemáticas: http://funes.uniandes.edu.co/2285/1/DesarrolloLondo%C3%B1oAsocolme2012.pdf

Mancera, G. &. (2012). *Relaciones de conectividad y complejidad en el eje de problemas y pensamiento matemático avanzado.* Medellin: (S. E. Medellín, Ed.). Obtenido de Repositorio Digital de documentos en educacion matematica.

MEN. (2014). *Colombia aprende.* Recuperado el 12 de Agosto de 2016, de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-342931_recurso_1.pdf

MEN, M. D. (24,25 y 26 de Octubre de 2006). *Enfrentar un problema, es encontrar un mundo de soluciones.* Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de MEN, Ministerio de Educación Nacional: http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-109928.html

MEN, M. D. (2014). *"Formar ciudadanos matemáticamente competentes".* Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de Colombia Aprende: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-342931_recurso_1.pdf

MEN, Ministerio de Educación Nacional. (24, 25 y 26 de Octubre de 2006). *MEN, Ministerio de Educación Nacional*. Recuperado el 25 de julio de 2016, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-109928.html

Milton Sady Riveros Castellanos, P. T. (2013). *Matematica Educativa 13 Encuentro Colombiano*. Obtenido de Algunas observaciones de la intervención de los tipos de: http://funes.uniandes.edu.co/2679/1/RiverosAlgunasAsocolme2012.pdf

OEI. (2008). *Metas educativas la educación que queremos para la generaciónde los bicntenarios 2021*. Recuperado el 27 de Octubre de 2016, de Organización de Estados Iberoamericanos: http://www.oei.es/historico/publicaciones/detalle_publicacion.php?id=111

Ortiz Legarda, M. (2001). La investigacion en educación matemática en colombia. *Estados del Arte de la investigacion en educación y pedagogia en Colombia*, 1-12.

Pacheco, Z. (2008). *Jugando para desarrollar el pensamiento logico matematico*. Santa Martha.

Ramírez, D. I. (2012). *Uniandes*. Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/2675/1/Ram%C3%ADrezImplementaci%C3%B3nAsocolme2012.pdf

Rivera, V., & Bohórquez, C. (2014). Competencia matemática pensar y razonar: un estudio con la media aritmética. *Amazonia Investiga, 3*(4), 6-20.

Riveros, M., & Rojas, P. (2012). *Algunas observaciones de la intervención de los tipos de representación en la enseñanzay aprendizaje de la función lineal*. Recuperado el 28 de Octubre de 2016, de Universidad Distrital Fancisco José De Caldas: http://funes.uniandes.edu.co/2679/1/RiverosAlgunasAsocolme2012.pdf

Romero, D. I. (2013). *Matematica Educativa 13 Encuentro Colombiano*. Obtenido de Implementación de una secuencia de enseñanza:

http://funes.uniandes.edu.co/2675/1/Ram%C3%ADrezImplementaci%C3%B3nAsocolme2012.pdf

Sampieri. (abril de 2016). Recuperado el 15 de agosto de 2016, de https://www.scribd.com/doc/7130674/SAMPIERI-Capitulo-4

Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas. (7 de Junio de 1998). Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de ministerio de eduacion nacional: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

UNESCO. (10 - 12 de Noviembre de 2014). *Conferencia Mundial de la UNESCO sobre la Educación para el Desarrollo Sostenible.* Recuperado el 27 de Octubre de 2016, de Educación para el Desarrollo Sostenible 2014: http://unesdoc.unesco.org/images/0023/002328/232888S.pdf

Valencia, J. J. (2013). *funes.uniandes.edu.co.* Recuperado el 15 de Agosto de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/2524/1/UnasecuenciaAnguloAsocolme2012.pdf

Vasco, C. (1998). Un panorama de la investigación en educación matemática en Colombia. *Educación Matemática* (págs. 41- 49). Bogotá: Universidad de los Andes.

Vasilachis de Gialdino, I. (Mayo de 2009). Los fundamentos ontológicos y epistemológicos de la investigación cualitativa. *FQS: FORUM: QUALITATIVE SOCIAL RESEARCH SOZIALFORSCHUNG, Volumen 10*(No. 2, Art. 30), 28.

Zuñiga, M. I. (2009). Un estudio acerca de la construcción del concepto de funcion. 30-40.

APÉNDICES

Apéndice A ***Matriz categorial de tratamiento***

		Niveles de comprensión de Tratamiento				
		Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**	**Nivel 5**
Sistemas de representación de funciones	Lenguaje natural	Fonología Morfología Reglas gramaticales de la lengua	Reconoce variables, regularidades e invariantes en una situación Dar sentido al enunciado	Actos locutivos Función discursiva Función metadiscursiva Sinonimia Paráfrasis	Actos ilocutivos Apofántica Relaciona el objeto con sus propiedades	Perlocotus
	Lenguaje algebraico	Reconoce los símbolos que corresponden a las variables de una expresión algebraica.	Utiliza las reglas para operar expresiones algebraicas Reconoce la dependencia de las variables en la escritura funcional	Reconocer el dominio de definición o de validez de la expresión	Evalúa la función para valores específicos	Expresar con simbolismo algebraico la estructura de una expresión aritmética (Implica generalizar y expresar simbólicamente dicha generalización).
	Gráfico	Reconoce el plano cartesiano como sistema de representación gráfico Establece escalas en los ejes del plano	Ubica las parejas ordenadas coordenadas	Reconoce cambios de escala en los ejes	Realiza la gráfica de una función a parir de su representación algebraica	Interpreta la información representada en la gráfica de una función
	Tabular	Lee información presentada en arreglos rectangulares	Asocia la correspondencia de valores a una pareja ordenada	Encuentra la razón de diferencia de una columna a otra	Construye tablas de datos a partir de una expresión algebraica	Construye tablas de datos a partir de una gráfica

Apéndice B ***Instrumento diagnóstico***

Basados en la matriz categorial del apéndice A. se elabora un diagnóstico para la primera etapa de la investigación tiene por objetivo reconocer el nivel de comprensión con respecto a tres de los cuatro sistemas de representación de una función y los cambios entre ellos. Siendo estos el lenguaje natural, tabular y gráfico. El instrumento se adaptó de la actividad diagnóstica utilizada por (POSADA & VILLA, 2006), el cuestionario consta de 4 preguntas abiertas y 3 preguntas que requieren realizar operaciones matemáticas de acuerdo con la interpretación dada.

UNIVERSIDAD LIBRE
MAESTRIA EN EDUCACIÓN
PRUEBA DIAGNÓSTICA

Esta prueba tiene como fin reconocer el nivel de comprensión en cuanto al concepto matemático denominado función y los cambios entre sistemas de representación, por tanto, le invitamos a contestar de manera individual para garantizar la veracidad de los resultados.

Colegio: ____
Nombre: ___________________________________ Curso: _______ Edad: _____

Una prestigiosa compañía de telefonía móvil tiene entre sus planes los siguientes:

PLAN MEDIO:
Cargo Básico: $70.000
Minutos incluidos: 150
Costo Minuto adicional: $700

1) Describa en sus palabras cada plan y las ventajas de cada uno.

PLAN BAJO: ____
____
____

PLAN MEDIO: ____
____
____

PLAN ALTO: ____
____
____

2) Suponga que usted puede pagar cualquiera de los tres planes, pero quiere escoger el que, de acuerdo a su consumo mensual, le salga más favorable, ¿Cuál escogería?

3) Usted tiene un consumo fijo mensual de 600 minutos, ¿Cuánto pagaría en cada plan por este consumo?

4) Completar las siguientes tablas:

PLAN BAJO	
Minutos gastados	Valor a pagar
50	
100	
	$ 183000=
350	
	$ 383000=

PLAN MEDIO	
Minutos gastados	Valor a pagar
50	
150	
	$ 105000=
300	
	$ 245000=

PLAN ALTO	
Minutos gastados	Valor a pagar
50	
150	
300	
	$ 150000=
	$ 240000=

5) Elaborar en una gráfica con los datos obtenidos en las tablas de cada plan.
6) Responda nuevamente la pregunta 2), apoyado en lo que observa en la gráfica.

7) La decisión tomada al comienzo, en la elección del plan fue la adecuada o lo cambiaria.

Apéndice C ***Matriz categorial de conversión***

Desde / Hacia	Sistemas de representación de funciones: Lenguaje natural	Gráfico	Tabular	Lenguaje algebraico
Sistemas de representación de funciones: **Lenguaje natural**		**Boceto (duval 2004)** Reconoce las unidades significantes presentes en el registro de partida y las pone en correspondencia en el registro de llegada. Correcta interpretación de la situación las unidades significantes en el registro natural y las unidades que están expresadas en el registro gráfico significan lo mismo en ambas representaciones. Existe igual orden de aprensión de las unidades significantes presentes en la conversión. Mantiene el sentido de una unidad significante, es decir la representación grafica representa la situación expresada en lenguage natural.	**Medida** Cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unica unidad significante en el registro de llegada. Las unidades significantes se presentan en el mismo orden en los dos sistemas de representación Todas y cada una de las unidades significantes presentes en el registro verbal se hacen presentes con un mism significado discrimina las unidades significantes en el sistema verbal y las pone en correspondencia con el registro tabular	**Modelo** Información: reconoce relaciones internas de la expresión Orientación guiada: reconoce una extructura externa conocida familiar o presente Explicitación: reproducir numericamente la estructura de una expresión simbólica Orientación libre: expresar con simbolismo algebraico la estructura de una expresión aritméfica Integración: escribir algebraicamente expresiones expresadas verbalmente.
Gráfico	**Interpretación (duval 2004)** Existe igual orden de aprensión de las unidadaes significantes presentes en la conversión. Cumple el primer criterio de correspondencia semántica. Cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada. comprende el significado de la relacion existente entre las variables (covariación)		**Lectura** Existe igual orden de aprensión de las unidadaes significantes presentes en la conversión. Cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada. Existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las magnitudes expresadas en los ejes cartesianos, sus unidades de medida, los valores de variación se encuentran enuciados en la tabla de valores Reconoce las variables de la situación y sus relaciones de covariación	**Ajuste** A cada punto de la gráfica le corresponde una pareja ordenada en el sistema algebraico. Existe igual orden de aprensión de las unidadaes significantes presentes en la conversión. Cumple el primer criterio de correspondencia semántica. La representación en el sistema simbólico expresa explicitamente las magnitudes que intervienen en la situación, en este registro las variables se encuentran implicitas en cada pareja.
Tabular	**Lectura** Existe igual orden de aprensión de las unidadaes significantes presentes en la conversión. Cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unica unidad significante en el registro de llegada. Discrimina las unidades significantes que proporciona la tabla y descubre las unidades correspondientes en los simbolos de la escritura natural.	**Trazado** Existe igual orden de aprensión de las unidades significantes presentes en la conversión. Cumple el primer criterio de correspondencia semántica. Expresa claramente las variables independiente y dependiente, sus valores de covariación y su relación de correspondencia. Cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada. Existe identidad entre las unidades significantes.		**Ajuste** Cumple el primer criterio de correspondencia semántica. Expresa claramente las variables independiente y dependiente, sus valores de covariación se encuentran implicitos en el sistema de llegada, estos se pueden hallar a partir del tratamiento en el sistema algebraico. Cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada. Existe igual orden de aprensión de las unidades significantes presentes en la conversión. Discrimina las unidades significantes visuales, que proporciona la tabla y descubre las unidades correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica.
Lenguaje algebraico (Kieran 2008)	**Interpretación** Existe igual orden de aprensión de las unidadaes significantes presentes en la conversión. Cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada. Cumple el primer criterio de correspondencia semántica. Entre las unidadaes signficantes elementales. Discrimina las unidades significantes visuales y descubre las unidades significantes correspondientes en los símbolos de la escritura natural Reconoce relaciones (igualad, factor, múltiplo, potencia, raíz, subestructuras comunes) entre expresiones o partes de expresiones y las expresa en palabras de relaciones internas.	**Gráfica** Existe igual orden de aprensión de las unidadaes significantes presentes en la conversión. Cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada. Cumple el primer criterio de correspondencia semántica. Expresa claramente las variables independiente y dependiente, sus valores de covariación y su relación de correspondencia. Existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las magnitudes expresadas en los ejes cartesianos, sus unidades de medida, los valores de variación se encuentran explicitos en la ecuación. Reconoce el dominio de definición o de validez de la expresión.	**Computo** Existe igual orden de aprensión de las unidadaes significantes presentes en la conversión. Cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada. Cumple el primer criterio de correspondencia semántica. Expresa claramente las variables independiente y dependiente, sus valores de covariación y su relación de correspondencia. Existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las magnitudes expresadas, sus unidades de medida, los valores de variación se encuentran reflejados en la tabla.	

Apéndice D ***Actividades de la propuesta didáctica***

Actividad 1 “Batalla naval”

Objetivos:

Promover el manejo de coordenadas rectangulares. (Tratamiento en el sistema gráfico).
Promover el uso del registro verbal. (Tratamiento en lenguaje natural)

Materiales: Formatos de los tableros en cartón, copia de los barcos en papel autoadhesivo y plumón rojo y azul.

Fase 1:

1. Formar parejas.
2. Lectura: Leer atentamente la siguiente lectura.

La Batalla Naval de Coronel

Los habitantes del puerto chileno de Coronel fueron sorprendidos por el estruendo de los cañones a las 16:30 horas de un día domingo 1º de noviembre de 1914. En esos momentos una poderosa Escuadra alemana, al mando del Conde Graff Von Spee, se enfrentó en batalla a una Escuadra inglesa al mando del Almirante Sir Christopher Cradock. Un dramático acontecimiento que ocurrió en aguas territoriales chilenas durante el transcurso de la Primera Guerra Mundial.

La historia, que hoy recordamos con muestras de admiración y respeto por los participantes, se desarrolló un domingo como hoy hace 95 años, protagonizada por los cruceros acorazados germanos “Scharnhorst” y “Gneisenau”; los cruceros ligeros “Nuremberg”, “Dresden“ y “Leipzip”; y una Escuadra inglesa compuesta por los cruceros “Good Hope”, Monmouth”, “Glasgow” y el “Otranto”, los que luego de navegar por áreas marítimas frente a nuestro litoral, se enfrentaron frente al puerto carbonero del sur.

Después de 50 minutos de iniciada la batalla la suerte de la escuadra inglesa estaba decidida. El “Good Hope” luego de recibir entre 40 a 50 impactos directos del “Scharnhorst” voló en pedazos a causa de la explosión de la santabárbara, y luego desapareció bajo las aguas con sus 950 hombres, desde el Almirante Cradock hasta el último grumete de su dotación. Entre tanto el “Monmouth”, acribillado a tiros por el “Nuremberg”, destrozado y en llamas, se dio vuelta de campana y se hundió con sus 800 tripulantes. El “Glasgow” trató de apoyarlo por un tiempo, pero luego se retiró, mientras el “Otranto” escapaba hacía el sur.

Posteriormente al dar la vuelta por el Cabo de Hornos para atacar Puerto Stanley en las Islas Falkland, la escuadra alemana fue sorprendida el 8 de diciembre de 1914, por buques ingleses, cuyas tripulaciones se vengaron de la derrota de Coronel, hundiendo a las naves de Von Spee, con la única excepción del crucero “Dresden”, que huyó al sur y oculto en los canales chilenos, logró escapar momentáneamente del acecho inglés hasta ser hundido finalmente en Juan Fernández el 15 de marzo de 1915, poniendo término a un drama de coraje y heroísmo destacado por la prensa mundial de la época. Tomado de: Mar de Chile, disponible en http://mardechile.cl/wordpress/?p=811 , agosto 2017

3. Colorea en el mapa de color azul los barcos Alemanes y su recorrido, de color rojo los barcos Ingleses y su recorrido.

4. Responde:
    a. ¿Por qué la batalla de Coronel se denomina NAVAL?
    b. ¿En las costas de qué país se desarrolla esta batalla?
    c. ¿Qué representan las x en el mapa?
    d. ¿En qué año y con qué motivo se realizó esta publicación?

Fase 2: Juego Batalla Naval

Instrucciones:

Cada estudiante recibe una copia del cartón # 1 y dos set de 5 barcos autoadhesivos de 2, 3, 4, 5 y 6 casillas respectivamente en color naranja y azul, uno para cada jugador.

Cada jugador recorta y pega sus barcos en las casillas del "tablero del jugador", sin dejarlo ver de su contrincante.

Los jugadores deciden quien empieza el juego.

El primer jugador debe decir una coordenada para atacar la flota enemiga nombrando primero una letra entre la A y la H, seguido de un número entre 1 y 10, por ejemplo: D7 y en el "Tablero del contrincante" marca esta coordenada con color ROJO si hace impacto, o AZUL si no ha dado a ningún barco.

Si en este lugar de su tablero se encuentra un barco el segundo jugador dice "IMPACTO" y marca con color ROJO la coordenada, de lo contrario dice "NADA" marca con color AZUL la coordenada.

En cualquiera de los dos casos corresponde al segundo jugador decir las coordenadas al primero y marcar con ROJO o AZUL en el "Tablero del contrincante", a la voz de "IMPACTO" o, "NADA, según sea el caso.

Cada jugador repetirá este procedimiento cuando corresponda su turno.

Cuando un barco ha recibido un IMPACTO en cada casilla que ocupa en el tablero dice "BARCO HUNDIDO".

Gana el jugador que hunda todos los barcos de su contrincante.

Al terminar buscan otro grupo que haya terminado para intercambiar parejas, reciben nuevos cartones y barcos para reiniciar los juegos que alcancen durante el tiempo planeado.

Finalizada la primera parte cada jugador recibe una copia del cartón #2 con nuevos barcos y se inicia nuevamente el juego, con la salvedad de que ahora las coordenadas estarán compuestas por dos números, donde el primero corresponde al eje horizontal y el segundo al eje vertical. Los demás procedimientos son iguales.

Reglas y tableros adaptados del juego "Astucia Naval", encontradas en la página:

http://reglasxjuegos.blogspot.com/2012/06/batalla-naval.html

Actividad # 2 “CARRERAS”

Objetivos:

- Aplicar conceptos de la física como desplazamiento y rapidez en el juego y la vida diaria.
- Promover el trabajo y aprendizaje cooperativo.
- Mostrar los resultados de nuestras acciones en un grupo y cómo desarrollar estrategias que permitan trabajar de una forma más óptima.

Materiales: Cronometro, hojas de registro de datos (tabla #)

Cronología: 4 horas

Motivación: 20 minutos

Primera parte: “Maratón”, 45 minutos.

Segunda parte: “Relevos”, 45 minutos.

Tercera parte: “Contratiempo”, 45 minutos.

Conclusiones: 45 minutos.

Personajes:

Docente: Prepara los materiales, asigna funciones y de las instrucciones de la actividad.

Estudiantes: Se construyen grupos de 5 personas, cada grupo recibe un distintivo de color diferente y debe asignar roles rotativos. (Corredor y medidor).

Procedimientos:

Motivación:

El docente habla al grupo del atletismo y su evolución histórica mostrando su importancia en el desarrollo de la sociedad y las guerras, haciendo énfasis en la salud (relación entre el deporte y la salud física y mental). Les hablará de los legionarios y las legiones Romanas su disciplina, orden y profundo sentido de pertenencia; contando sus hazañas más notorias y como nosotros podemos llegar a ser grandes líderes.

Se explicará la forma en que se desarrollará la actividad, que el resultado del grupo se verá afectado por cada competidor razón por la cual todos deben dar lo mejor de sí; haciendo énfasis de la importancia del trabajo en equipo y haciendo la diferencia entre el trabajo en cooperativo y el individual para fortalecer el trabajo y aprendizaje.

Primera parte: “Maratón”

Antes de iniciar la competencia cada grupo debe tener un nombre y una frase que los identifique, la cual dirán al iniciar la prueba y al terminarla.

Dada una distancia fija de 30 m en línea recta se delimitan carriles (la distancia puede variar de acuerdo con las condiciones disponibles); cada carril le corresponde a un grupo el cuál asignará a cada corredor un compañero, medidor ubicado en el extremo final de la pista quien medirá el tiempo que tarda cada corredor en llegar a la meta y el puesto en el que llega entre los corredores consignando los datos en la planilla entregada. El tiempo se escribe con dos decimales.

La señal de salida la dará el profesor en cada ronda de la competencia.

Una vez terminada esta ronda se hidratan los competidores y se reunirán por grupos para calcular la rapidez de cada uno, estos cálculos se harán de acuerdo a la teoría explicada previamente y se entregarán en el formato facilitado por el docente. Las medidas deben ser entregadas en las unidades solicitadas, los cálculos se realizaran con calculadora y se expresarán con 2 decimales.

Sanciones:

- Quien parta antes de la señal le generará como sanción al grupo perder el turno.
- El ganador de esta fase será el grupo cuya rapidez promedio sea mayor.

Formato primera parte: “Maratón”

Roles: los papeles que desempeñará cada integrante del grupo y el momento en el que lo hará.

Nombre del grupo:	Lema:	Color:

Distancia del recorrido:	metros	kilómetros	Compañeros a quienes medirá el tiempo

Integrantes			
	1)	Cronometra:	
	2)	Cronometra:	
	3)	Cronometra:	
	4)	Cronometra:	
	5)	Cronometra:	

Integrante	Puesto		Tiempo 1er recorrido	Tiempo 2do recorrido	Tiempo promedio	Rapidez en m/seg
1)						
2)						
3)						
4)						
5)						

Suma del tiempo promedio	seg	Rapidez promedio del grupo	m/seg
	h		Km/h

Hoja de cálculos y estrategias

Actividad # 3 “RELEVOS”

Se ordenan los resultados del más rápido al menos rápido para la siguiente ronda. Con los resultados de la maratón se ordena cada grupo según criterio propio para hacer una carrera por relevos de la siguiente forma:

Se hace una fila en la salida con los 5 integrantes.

El primer corredor recorre la pista de ida y vuelta en el menor tiempo posible, al llegar a la salida nuevamente, le entregará al segundo corredor el testigo (objeto que transporta desde el momento que parte) antes de la línea de salida y este a su vez repetirá el recorrido y así sucesivamente hasta que pase todo el grupo. Se toma el tiempo de cada corredor de forma individual y se registra en el formato. Al terminar la prueba cada grupo se hidratará y procederá a hacer los cálculos correspondientes a la prueba.

Luego deben ubicar los resultados en el plano cartesiano y unirlos para formar una gráfica de la rapidez del grupo. Finalmente deben entregar el informe completo y diligenciado.

Sanciones:

- Quien haga entrega antes de la meta del testigo deberá devolverse reiniciar la carrera.
- El ganador de esta fase será el grupo cuya rapidez promedio sea mayor.

Formato: “Relevos”

Roles: los papeles que desempeñará cada integrante del grupo y el momento en el que lo hará.

Nombre del grupo:	Lema:	Color:

Distancia del recorrido:	metros	kilómetros	Tiempo empleado en el recorrido		
				seg	Horas
Orden de salida	1)		Tiempo:		
	2)		Tiempo:		
	3)		Tiempo:		
	4)		Tiempo:		
	5)		Tiempo:		
Distancia total	m	Km	Tiempo total (sume todos los tiempos)		

Número del corredor	Rapidez de cada corredor		Rapidez del grupo	m/seg
1)	m/seg	Km/h		Km/h
2)	m/seg	Km/h	Puesto en el que terminó el grupo	
3)	m/seg	Km/h		
4)	m/seg	Km/h		
5)	m/seg	Km/h		

Grafica comparativa de la rapidez de cada integrante

Estrategia:

Cálculos y ecuaciones:

Conclusiones

Actividad # 4 “Contra tiempo”

Para esta prueba cada grupo escogerá un corredor, se dará una rapidez y una distancia fijas. El grupo debe calcular el tiempo que necesitan para efectuar el recorrido y conseguir la rapidez pedida.

La prueba se realizará en el mismo circuito que se tiene en las partes uno y dos. Cada grupo debe generar una estrategia para los corredores, así como una forma de comunicarse sin sonidos (visual señas) que le permita informar a los corredores sobre la manera en que están empleando el tiempo.

Los corredores inician el recorrido con la orden de salida dada por el docente y sus compañeros se ubican a lo largo del recorrido para dar indicaciones de aumentar o disminuir la rapidez a los competidores para cumplir el objetivo.

A continuación cada grupo nombra un nuevo competidor y se repite nuevamente el procedimiento hasta que todos los competidores hallan pasado.

Sanciones:

- El grupo que más se aproxime al tiempo dado para tener esa rapidez en el tiempo dado será el ganador de la ronda.

Conclusiones

Se realizara una plenaria y se discutirá sobre:

- Lo aprendido y las aplicaciones en la vida diaria.
- Efectos tiene la rapidez en el diario vivir y las consecuencias de tener normas que regulen la movilidad en la ciudad.
- La incidencia del trabajo en equipo (cooperativo) en el desarrollo de actividades de aprendizaje y en general en las actividades de cualquier índole.
- Reconocer el papel de cada individuo en el desarrollo de la actividad escuchando de sus compañeros le nivel de desempeño que el logro de acuerdo a las tareas que tenía a cargo.

Producción:

- Se promediarán los dos resultados para tener un resultado único por competidor.
- Se ordenarán los resultados del más rápido al menos rápido para la siguiente ronda.
- La rapidez promedio del grupo se calculará sumando los cinco resultados de rapidez única de cada competidor y9 dividiendo en cinco.
- El grupo que haya llegado en más ocasiones en el primer puesto tendrá un bono de 10 puntos.
- Se entregara el informe completo y diligenciado.

Condiciones:

- entregado por el profesor.
- El equipo que termine de primero la prueba tendrá 50 puntos, los demás tendrán 10 puntos menos de cuerdo al orden de llegada.
- El grupo en el cuál se encuentre el corredor más rápido según los resultados tendrá 20 puntos.
- El grupo que termine primero los cálculos y estén correctos tendrá 50 puntos.

Productos:

- Se debe calcular la rapidez de cada participante de forma individual, según el formato.
- Se sumarán todos los tiempos de los integrantes de cada grupo para calcular la rapidez del grupo.

Producción:

- Cada grupo entregará los cálculos hechos para averiguar el tiempo pedido.
- Entregará por escrito la estrategia de comunicación entre sus integrantes (señas y lo que representan).

ACTIVIDAD 5 “Análisis de gráficas”

Objetivos:

- Reconocer las reglas de representación de sistema grafico como escala, par ordenado, variables, unidades. (Tratamiento)
- Extrae información de la gráfica y la expresa de forma oral, escrita en lenguaje natural y formal. (conversión g-ln g-lf)
- Tabula la información presentada en un gráfico (conversión g-T)
- Evalúa funciones en valores específicos. (conversión A-T-G)
- Identifica la relación de dependencia entre variables. (Tratamiento)
- Reconoce y aplica las matemáticas en diferentes contextos

Fase 1 (10 min)

CARTOGRAFÍA

El hombre ha empleado mapas desde la más remota antigüedad, y probablemente ya los hacían en épocas prehistóricas. Es posible que incluso algunos dibujos encontrados en cuevas y refugios, con un significado desconocido hasta el momento, sean croquis de los territorios donde vivían y cazaban. Tanto las civilizaciones antiguas como los pueblos primitivos tuvieron como soporte de los mapas a una plural variedad de materiales; grabados sobre madera, sobre piedra, o sobre tabletas de arcilla cocida, pintadas sobre la piel preparada de un animal, o hechos en un entramado de piezas de madera, se constituyen en representaciones que hicieron con base en su percepción natural. La idea de que la Tierra era una esfera y no un disco plano fue enunciada primero por Pitágoras y los discípulos de su escuela. En el siglo IV esta idea, apoyada por Sócrates, Platón y Aristóteles, estaba ya plenamente admitida en los tiempos filosóficos. En el siglo III, fue cuando Eratóstenes, director de la escuela de Alejandría, emprendía la tarea de medir el radio de la Tierra llegando a un valor muy aproximado a la realidad. Eratóstenes midió la distancia según un arco de meridiano entre Siena (la actual Asuán, situada cerca del trópico de Cáncer) y Alejandría, calculando su diferencia de latitudes por la altura del sol al mediodía en el solsticio de verano en Alejandría, pues en Siena los rayos eran cenitales en aquel momento. En efecto parece que de sus cálculos se deduce un valor del arco de grado de meridiano de 110 Km, bien próximo al verdadero. (111 Km.) Es interesante considerar que aunque la idea de Eratóstenes era genial, en el éxito de su cálculo influyó mucho la suerte, porque todos sus datos eran aproximados pero erróneos. En realidad el Sol no culminaba sobre Siena, puesto que no está justo en el trópico, Alejandría y Siena no están en el mismo meridiano y la medición de distancia era por demás aleatoria, ya que la estimó en función del tiempo que tardaban en recorrerla las caravanas. Estas mediciones de Eratóstenes fueron rectificadas un siglo después por Poseidonio, quien dió al tamaño del grado de la circunferencia del meridiano un valor mucho menor. Este último valor, que en realidad era muy inferior al verdadero, fue adoptado por Ptolomeo y legado a los cartógrafos del siglo XV, lo cual dió lugar al error de Cristóbal Colón tomando América por Asia, puesto que había calculado como menor el tamaño de la Tierra. El apogeo de la cartografía griega está unido al nombre de Claudio Ptolomeo que vivió en Alejandría en los años 90 al 168 después de J.C., cuando aquellas tierras pertenecían al Imperio Romano. 1 Mora, H. Modulo Geomática y Demografía. 2007; http://www.monografias.com/trabajos11/cartuno/cartuno.shtml Figura 1. Esquema sobre cómo calculó Eratóstenes la circunferencia terrestre. Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Geodesia Ptolomeo es autor del primer Atlas Universal, en el cual no sólo usa meridianos y paralelos y sitúa poblaciones por coordenadas, sino que emplea proyecciones cónicas. Fue fundamentalmente astrónomo y matemático;

su famosa geografía, compuesta de 8 volúmenes, es esencialmente una tabla de coordenadas geográficas, una extensa relación de unos 8000 nombres de lugares con latitudes y longitudes para determinar su posición, a manera de una guía o vademécum. Solamente dos de los ocho volúmenes tratan de principios teóricos de cartografía, geografía matemática, proyecciones, etc. Durante la edad media el atlas de Ptolomeo fue reproducido muchas veces en el mundo musulmán (Almagesto) y en los siglos XV y XVI fue impreso en varias ocasiones en Occidente, donde no se conoció hasta 1477. En sus mapas la representación de la península no es muy correcta en su forma, pero está llena de detalles que reflejan los conocimientos de la época. Desde entonces, el desarrollo de la cartografía alcanzó grandes avances, surgiendo conceptos interesantes como las proyecciones cartográficas, así como diversos tratadistas que planteaban proyecciones que mejor satisficieran propósitos específicos en virtud de los intereses de los mapas. El propósito de las proyecciones de mapas, generales o específicas, ha sido discutido en innumerables artículos, documentos y libros desde la época del astrónomo Ptolomeo, y las proyecciones son conocidas en uso por lo menos desde hace tres o cuatro siglos. La mayoría de las proyecciones ampliamente utilizadas han sido desarrolladas entre los siglos XVI y XIX, y variaciones han sido formuladas en el siglo XX.

Tomado de mejora de los sistemas de cartografía del territorio colombiano capítulo 2 cartografía, más información en: ftp://ftp.ciat.cgiar.org/DAPA/planificacion/GEOMATICA/Geodesia_Cartograf%C3%ADa/Cartograf%C3%ADa_Modulo.pdf

Materiales:

- Investigación previa
- Hoja examen
- Lápiz y calculadora
- Tiempo de duración 60 min

Condiciones

- La actividad es individual
- Se debe permanecer en silencio hasta la etapa 3

Fase 2 (40 min)

Análisis de gráficas, relaciones entre variables y covarianza:

La siguiente gráfica representa la distancia recorrida por una persona durante una competencia.

$x(t)$: distancia en funcion del tiempo

$T(t)$: temperatura en funcion del tiempo

Determine:

1. ¿Cuánto tiempo duro la caminata?

2. ¿Qué distancia recorrió?

3. ¿Cuál fue su desplazamiento?

4. ¿Cuáles fueron su máxima y mínima temperaturas?

5. ¿Cuáles fueron su máxima y mínima rapidez?

6. ¿En qué intervalo de tiempo se detuvieron y cuál era su temperatura?

7. ¿En qué instante y a que distancia su temperatura es de 13 °C?

8. Interprete que representan cada una de las siguientes expresiones y represéntelas.

    a. $x(6) =$
    b. $x(0) =$
    c. $x(18) =$
    d. $x(34) =$
    e. $T(6) =$
    f. $T(0) =$
    g. $T(36) =$
    h. $T(16) =$

9. Calcule los siguientes valores e interprete sus unidades, lo que representan

    a. $\frac{x(10)-x(6)}{10-6} =$
    b. $\frac{x(14)-x(10)}{14-10} =$
    c. $\frac{T(10)-T(6)}{10-6} =$
    d. $\frac{T(14)-T(10)}{14-10} =$

10. ¿Cuál es la relación de la distancia y la temperatura?

Fase 3 (15 min)

Conclusiones y cierre de la actividad

1. Comparo mi estrategia de solución con un grupo de mis compañeros.
2. Comparo los resultados de mi análisis con un grupo de compañeros.
3. ¿Qué conocimientos me aporto?
4. ¿Qué relación hay entre la temperatura y la distancia recorrida?
5. Se podría predecir con algún modelo la temperatura y la distancia para un instante de tiempo determinado.
6. ¿Qué tipo de función se ajusta a la forma de la función?

ACTIVIDAD 6 Modelos Matemáticos

Objetivos:

- Reconocer las reglas de representación de sistema grafico como escala, par ordenado, variables, unidades. (Tratamiento)
- Extrae información de la gráfica y la expresa de forma oral, escrita en lenguaje natural y formal. (conversión g-ln g-lf)
- Tabula la información presentada en un gráfico (conversión g-T)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una gráfica. (conversión G-A)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una tabla de datos. (conversión T-A)
- Evalúa funciones en valores específicos. (conversión A-T-G)
- Reconoce y aplica las matemáticas en diferentes contextos

Fase 1 (10 min)

Velocidades y trayectorias en las naves espaciales

Este tema tiene relación con las **velocidades de escape** que deben lograr los ingenios espaciales al instante de despegar de la Tierra o bien de otro cuerpo celeste, las velocidades mínimas que deben adquirir para mantener una órbita segura en torno a la Tierra y los otros cuerpos, la velocidad mínima que deben adquirir para lograr éstos o bien desamparar el Sistema Solar.
El tema incluye el cálculo, ejecución y seguimiento de los movimientos orbitales de las naves en torno a los cuerpos celestes, las distintas alturas a lograr en la realización de las órbitas, la determinación de las trayectorias más eficaces en concepto de gasto de comburente y tiempo de aquellas naves que pretenden lograr los mundos del Sistema Solar, tanto interiores como exteriores; igualmente, se aborda el c**álculo de las trayectorias de reingreso de las naves a la atmósfera de la Tierra.**

Las velocidades galácticas

Con respecto a las velocidades que deben lograr las naves hay **una primera llamada de satelización** (siete con nueve km/s,) que es la velocidad mínima que les deja mantener una órbita circular sin caer a la Tierra; al acrecentar la velocidad las órbitas van a ser poco a poco más elípticas.
Al lograr los once con dos km/seg (**velocidad parabólica**) la nave se libera de la atracción gravitatoria de la Tierra y entra en la del Sol a la forma de un pequeño asteroide. Al lograr los cuarenta y dos km/s (**velocidad hiperbólica**) la nave es capaz de liberarse de la atracción solar y escapar del Sistema.

Cuanto más cerca se halle una nave orbitando la Tierra, más veloz va a deber moverse para mantener su órbita; en caso contrario, va a caer en las capas altas de la atmósfera.
Por ende, el período de vida orbital de toda nave va a depender de la altura que hayan alcanzado (p.ej: el satélite Explorer I tenía una velocidad de veintiocho km/h para lograr un auge de dos mil cuatrocientos setenta y cinco km desde la superficie). **La duración de la órbita de una nave va a depender de la distancia en altura que haya alcanzado.**

Las órbitas satelitales pueden ser descritas en cualquier sentido con relación al Ecuador terrestre, si bien se prefieren trayectorias predeterminadas que dejen un seguro rastreo de una parte de los equipos de Tierra.

En lo que se refiere a las trayectorias y velocidades requeridas para la **exploración de la Luna**, las naves deben lograr el punto de equilibrio entre la atracción terrestre y la lunar. La velocidad establecida para lograr este punto es de diez con nueve km/s, lo que deja a los instrumentos orbitar la Luna sin el riesgo de estrellarse en su superficie o bien pasar de largo. Puesto que la Luna tiene una fuerza de gravedad inferior a la de la Tierra, las velocidades galácticas requeridas de satelización y escape son menores que la de ésta.

Las velocidades y trayectorias elípticas que llevan a las naves a la **exploración del resto de los cuerpos celestes** del Sistema Solar implica condiciones de cálculo de trayectorias y velocidades más bien difíciles, puesto que se deben tomar en cuenta una serie de factores: movimiento de la Tierra, atracción gravitatoria del Sol y de los planetas, cercanía o bien lejanía del cuerpo a explorar, velocidad de tales cuerpos, capacidad de comburente y empuje desarrollados por la nave.

En términos generales, resulta más simple para los científicos y controladores la **exploración de los mundos interiores del Sistema Solar que los mundos exteriores**; en el primer caso las naves aprovechan la repercusión gravitatoria del Sol, al paso que en el segundo las naves deben vencer dicha repercusión y la de los otros cuerpos a través de un mayor gasto de comburente y a través de complejos cálculos de trayectorias que las hagan lograr su objetivo.

En este último caso las trayectorias escogidas acostumbran a ser las más largas, y las más asequibles en concepto de gasto de comburente. Esencialmente, las naves destinadas a los mundos exteriores, lanzadas en dirección al Este, deben aprovechar la fuerza inercial que les da el movimiento de rotación de la Tierra (unos mil seiscientos setenta km/h), a lo que suman su impulso proporcionado por los cohetes.

Anterior a la realización del viaje durante la trayectoria escogida las naves han de ser puestas en una órbita terrestre llamada de parking.

El mejor instante para empezar el viaje a los planetas interiores (como es el caso de Venus) es cuando éstos se hallan en **conjunción**, o sea, entre la Tierra y el Sol; para comenzar el viaje a los planetas exteriores (como es el caso de M.) se debe aguardar el instante en que éstos se hallan en oposición, esto es, de la parte opuesta del Sol con respecto a la Tierra.

Tomado de la página programa espacial, ciencia y tecnología (2017)
http://www.programaespacial.com/astronautica/velocidades-y-trayectorias-en-las-naves-espaciales.html

Materiales:

- Dos hojas examen cuadriculadas.
- Calculadora.
- Lápiz.
- Cuaderno.
- Regla.

Condiciones

- La actividad es individual
- Se debe permanecer en silencio hasta la etapa 3

Fase 2 (30 min)

Ajustar la curva a modelos determinados

1. la siguiente gráfica representa el comportamiento del valor de las acciones de una empresa en la bolsa de valores de Bogotá en el tiempo, determine:

   a. La expresión algebraica o modelo que representa la gráfica e interprete la relación entre las variables. (utilizar un modelo cuadrático).
   b. En que instante compraría las acciones
   c. En que instante vendería las acciones
   d. ¿Cuál es el precio inicial?

Fase 3 (40 min)

Relaciona variables y las ajusta a modelos determinados

1. Un lápiz diseñado con el cuerpo en forma de cilindro, la pinta es un cono y el borrador una semiesfera. Si el volumen del borrador y la punta son iguales, la longitud del lápiz es 15 cm; determine el volumen del lápiz en función del radio.

2. En unlaboratorio se esta calibrando la curva de una bomba centrifuga, para esto se utiliza la informacion de la tabla, en la cual (la abscisa o eje x es la presión y ordenada o eje y el caudal) hallar:

   a. La ecuación de la parábola.
   b. A qué presión se encuentra el caudal máximo
   c. f(5) = f(-1) = f(10) = indicar que representan.

Presión (Pascales)	Caudal m^3/min
3	2
1	12
0	8

ACTIVIDAD 7 AJUSTE DE DATOS

Objetivos:

- Extrae información de la gráfica y la expresa de forma oral, escrita en lenguaje natural y formal. (conversión g-ln g-lf)
- Construye graficas a partir de tablas de datos. (conversión T-G)
- Tabula la información presentada en un gráfico (conversión g-T)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una gráfica. (conversión G-A)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una tabla de datos. (conversión T-A)
- Evalúa funciones en valores específicos. (conversión A-T-G)
- Identifica la relación de dependencia entre variables. (Tratamiento)
- Reconoce y aplica las matemáticas en diferentes contextos

Fase 1 (10 min)

Pero, ¿qué tiene que ver la geometría con la vida diaria? Todo, según los expertos. Arturo Ponce, creador de una ciencia que se conoce como geometría sagrada, sostiene que se ha aplicado desde la antigüedad en las diferentes culturas. Es como un código en donde se utilizan patrones diferentes como el arte, la arquitectura, la música, sin importar la latitud. Es un código de la naturaleza para crear la vida, tanto así que el cuerpo está construido con patrones geométricos y proporciones, las plantas también tienen una distribución y el corazón, una coherencia interna de ondas eléctricas en relación con las del cerebro, sostiene. El principio de la geometría sagrada es el de vincular la materia y el espíritu, añade la médica Federica Freydell, una de las organizadoras del seminario sobre el tema que se realiza este fin de semana. Asegura que acercar el cuerpo a las formas es el camino a la armonía. La naturaleza tiene un lenguaje geométrico. Estas leyes que se aplican en el arte, en la arquitectura, el diseño, en la ciencia, en la física, la música, las matemáticas, el color, los animales, en la geología, en el Feng Shui. MATEMÁTICA PURA La geometría sagrada sostiene su base matemática en tres números irracionales: phi, pi y Euler. Phi que tiene el valor de 1.618033.; Pi es la relación del diámetro de un círculo y su circunferencia; y Euler es la base natural de los logaritmos. La proporción determinada por Phi era conocida por los egipcios, los griegos y las culturas de Mesoamérica y también fue retomada por los artistas del Renacimiento y llamada proporción divina. Al corte que produce este número en una línea recta se le conoce como sección dorada, por eso Phi es el Número de Oro. EN LA PRÁCTICA La aplicación de la geometría ayuda en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades. Existe un aparato llamado retroalimentador que mide las ondas y a través de una interfase puede moverlas a voluntad y acomodar sus frecuencias. También hay otra tecnología que permite medir los armónicos de la voz y detectar en qué frecuencias se debe trabajar. De acuerdo con Arturo Ponce, las terapias hablan de la necesidad de hacer que los eventos internos se ordenen y acomoden de tal manera que las contradicciones internas puedan resolverse y generar una conciencia de unidad. Para eso, se utilizan herramientas como la visualización de mándalas geométricos y la capacidad para sentir el campo electromagnético que promueven el desarrollo de la atención, la memoria y la percepción. En la medicina alternativa se utilizan los poliedros que se ponen en diferentes partes del cuerpo para recuperar la armonía. Se necesitan varias sesiones, que deben ir combinadas con apoyo psicológico y cambios en el estilo de vida. RECOMENDACIONES Los códigos de la geometría se pueden utilizar en la vida diaria. Al pintar una pared para obtener mayor armonía, se puede multiplicar el alto total por 0,618 y así se generan dos segmentos: el de abajo debe ser más oscuro y el de arriba, claro. La forma de las flores también puede generar beneficios: los girasoles atraen la energía y las margaritas el orden. Las más poderosas son las que van en patrones de cinco pétalos (5, 10, 15). También se recomienda dormir en un lugar donde en las mañanas se puedan recibir los primeros rayos del sol y evitar hacerlo cerca de metales como el aluminio y el acero. DA VINCI HOMBRE PERFECTO. La proporción de phi se encuentra en el cuerpo humano, Da Vinci lo representó en el Canon del Hombre. El ancho a razón del largo de la cabeza tiende a phi. La mano a razón del antebrazo tiende a phi. En la mano, la distancia entre las falanges. Cuando meditamos o estamos tranquilos, en el latido del corazón, la sístole y la diástole están espaciadas a razón de phi. Eso sin contar con la forma de la oreja, una espiral dorada. También en la arquitectura, por ejemplo, en Notre Dame, el Partenón, la pirámide de Teotihuacán. Y en el arte, phi ha sido usado por Dalí, Da Vinci y Seurat, según expertos.

Tomado de la página del periódico económico portafolio sección finanzas; más información en. **http://www.portafolio.co/economia/finanzas/geometria-aplica-vida-diaria-180528**

Imagen tomada de la presentación ubicada en https://prezi.com/u34yy-s4rbe3/cuerpos-geometricos-en-la-vida-diaria/

¿Cuáles son las constantes más notables de la geometría, de donde salen y cuál es su valor?

¿Qué entiendes por área y perímetro?

¿Cuál es el volumen del cono, cilindro y esfera?

¿Conoces algún objeto formado o compuesto por algunos de estos solidos?

Materiales:

- Dos hojas examen cuadriculadas.
- Calculadora.
- Lápiz.
- Cuaderno.
- Regla.

Condiciones

- La actividad es individual
- Se debe permanecer en silencio hasta la etapa 3

Fase 2 (30 min)

Ajustar la curva a modelos cuadráticos

1. la siguiente gráfica representa la población de conejos de una granja, determine:

a. La función que representa la gráfica e interprete la relación entre las variables (utilice un modelo cuadrático de la forma $y = ax^2 + bx + c$).

b. Completar la siguiente tabla

c. Calcule la población en t= 17 meses

d. ¿En qué instante la población es cero?

e. ¿Cuál es la población inicial?

f. ¿Cuál es la población máxima?

g. ¿Cuál es el dominio de la función?

h. ¿Cuál es el rango de la función?

Tiempo (meses)	Población (número de individuos)
7	
	1500
23	
10	
	10000

Fase 3 (90 min)

Generar modelos que permitan analizar, representar y tomar decisiones sobre un conjunto de variables y relaciones.

1. Un cono que tiene X centímetros de diámetro en su base contiene una bola de helado que tiene el mismo diámetro del cono. El helado se derrite en el cono y lo llena completamente. Determine:

- **a.** Un esquema que represente la situación
- **b.** La altura del cono, en términos de X antes de derretirse
- **c.** Halle la función que determina el volumen del cono y el helado antes de derretirse en términos de X.
- **d.** Qué le pasa a la altura si se triplica el diámetro
- **e.** Realice la gráfica de la función utilizando un sistema de grafiar computacional.
- **f.** Que valores puede tomar la variable diámetro (dominio de la función)

2. Un laboratorio farmacéutico quiere sacar una nueva presentación de un medicamento que actualmente vende en pastillas de 6 milímetros de diámetro y 2 milímetros de alto. La nueva presentación será una cápsula formada por un cilindro rematado en sus extremos por semiesferas. Si **r** es el radio de las semiesferas, hallar:

- **a.** La función que expresa la altura del cilindro de la cápsula en términos del radio **r**.
- **b.** La función que expresa la altura total de la cápsula en términos del radio **r**.
- **c.** Grafique las dos funciones con un sistema de grafico computacional y determine si tienen máximos o mínimos y en que valores se cruzan, e interprete estos resultados.
- **d.** ¿Cuál es el dominio de cada una?

3. Se unen los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado **m**, como se ilustra en la figura. Si se denota con **P** el perímetro y con **A** el área del cuadrado inicial, entonces:

- **a.** El perímetro y el área del cuadrado obtenido son, respectivamente:
- **b.** Si se repite este proceso 3 veces cuales serían las nuevas funciones de área y perímetro de esta figura.
- **c.** Si repetimos este proceso n-veces cuales serían las funciones de área y perímetro de estas nuevas figuras.

ACTIVIDAD 8 “Caja sin tapa”

Objetivos:

- Reconocer las reglas de representación de sistema grafico como escala, par ordenado, variables, unidades. (Tratamiento)
- Extrae información de la gráfica y la expresa de forma oral, escrita en lenguaje natural y formal. (conversión g-ln g-lf)
- Construye graficas a partir de tablas de datos. (conversión T-G)
- Tabula la información presentada en un gráfico (conversión g-T)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una gráfica. (conversión G-A)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una tabla de datos. (conversión T-A)
- Evalúa funciones en valores específicos. (conversión A-T-G)
- Identifica la relación de dependencia entre variables. (Tratamiento)
- Reconoce y aplica las matemáticas en diferentes contextos

Etapa 1 (10 min)

Un modelo matemático para la optimización de recursos de los proyectos científicos

En México, para el año 2013, el Gobierno Federal designó 5.4 mil millones de pesos en su Presupuesto de Egresos de la Federación para invertirlos en Proyectos de Innovación Tecnológica gestionados por el CONACYT. Muchos de éstos Proyectos terminan con sobrecostos y con subestimaciones. En el primer caso, el de los sobrecostos, el presupuesto sobrante es regresado a la Federación sin posibilidad de reasignación a otros proyectos; y para el caso de las subestimaciones, los proyectos terminan inconclusos y entran nuevamente a concurso para asignarles más recursos. Actualmente no existen estudios que indiquen el porcentaje de proyectos de innovación finalizados como exitosos, dudosos o fracasados en México, sin embargo Garza-Cantú, M. (2010), en la revista Política Digital indica que a nivel mundial los proyectos que finalizan Computación y Sistemas, Vol. 20, No. 4, 2016, pp. 749–761 doi: 10.13053/CyS-20-4-2277 750 Mario Alberto ZuritaBarrón, Jorge A. Ruiz-Vanoye, Ocotlan DiazParra, Alejandro Fuentes-Penna, et al. ISSN 2007-9737 como exitosos oscilan entre el 32% y 40%, y consideran que en México el porcentaje es aún inferior. Dentro de los Procesos del CONACYT, existe uno cuya función es determinar si los Proyectos de Inversión son aprobados o no, en base a criterios técnicos y económicos. Los pasos en forma general van desde la presentación del Proyecto por parte de los investigadores, la asignación de un grupo especializado de revisores en el área de competencia, la evaluación económica que determina la factibilidad del proyecto en base a lo solicitado en el proyecto. La evaluación final de factibilidad técnica se determina en base a criterios ya establecidos y se realiza un checklist de dichos criterios para calificar el cumplimiento de todos. La evaluación económica solo se limita a revisar si existen los suficientes fondos en las partidas.

Tomado de **Un modelo matemático para la optimización de recursos de los proyectos científicos, mas información en http://www.scielo.org.mx/pdf/cys/v20n4/1405-5546-cys-20-04-00749.pdf**

Construir una caja sin tapa recortando cuadrados del mismo tamaño en las esquinas de una hoja de 20x30 cm, de forma tal que el volumen sea máximo.

Materiales:

- Dos hojas de papel de 20x30 cm.
- Tijeras y cinta.
- Calculadora.
- Lápiz.
- Cuaderno.
- Regla.

Condiciones

- La actividad es individual
- Se debe permanecer en silencio hasta la etapa 3

Desarrollo:

Etapa 2 (3 min)

Trace líneas punteadas que se encuentren a la misma distancia de los lados de la hoja, estas formarán cuadrados en sus extremos, recórtelos.

Etapa 3 (2 min)

Doble las pestañas de papel en la misma dirección sobre las líneas punteadas, mida el largo, ancho y alto de la caja formada.

Etapa 4 (7 min)

1. Calcule el volumen de la caja con los datos obtenidos y compare sus resultados con 5 compañeros complete la tabla de datos

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Alto (cm)	Volumen (cm^3)
Tu				
Compañero 1				
Compañero 2				
Compañero 3				
Compañero 4				
Compañero 5				
Compañero 6				
Compañero 7				
Compañero 8				
Compañero 9				
Compañero 10				

2. Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta.
   ¿Las medidas de tu caja son iguales a las de tus compañeros?
   ¿Quién obtuvo el mayor volumen?
   ¿De qué depende el tamaño de la caja?
   ¿crees que hay un valor en el cual el volumen sea el mayor de todos los posibles (máximo)?
   ¿Cuáles son de las posibles medidas que se pueden recortar, el mínimo y el máximo?

Etapa 5 (10 min)

Grafique las parejas formadas por la altura y el volumen que aparecen en la tabla, utilice la escala dada.

Etapa 6 (30 min)

1. Establezca relaciones entre las variables para reducir la cantidad y generar una función.

2. Realice un esquema gráfico de la caja, asignando variables y escriba una expresión algebraica que relacione la altura y el volumen de la caja.

Etapa 7 (30 min)

1. Calcule los valores de la tabla de datos con el modelo matemático (función) y compárelos con los de la tabla anterior; utilice los mismos valores para las alturas. Si no son iguales explique porque cree que varían

Nota: Utilizar calculadora y tres decimales en cada respuesta.

2. Grafique las parejas ordenadas altura, volumen de la tabla en el plano cartesiano anterior con otro color y compare.

3. Utilice la tabla y la calculadora para encontrar el volumen máximo.

4. Construya la caja de volumen máximo.

	Alto (cm)	Volumen (cm^3)
Tu		
Compañero 1		
Compañero 2		
Compañero 3		
Compañero 4		
Compañero 5		
Compañero 6		
Compañero 7		
Compañero 8		
Compañero 9		
Compañero 10		

ACTIVIDAD 9 “Caja con tapa”

Objetivos:

- Reconocer las reglas de representación de sistema grafico como escala, par ordenado, variables, unidades. (Tratamiento)
- Extrae información de la gráfica y la expresa de forma oral, escrita en lenguaje natural y formal. (conversión g-ln g-lf)
- Construye graficas a partir de tablas de datos. (conversión T-G)
- Tabula la información presentada en un gráfico (conversión g-T)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una gráfica. (conversión G-A)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una tabla de datos. (conversión T-A)
- Evalúa funciones en valores específicos. (conversión A-T-G)
- Identifica la relación de dependencia entre variables. (Tratamiento)
- Reconoce y aplica las matemáticas en diferentes contextos

Construir una caja con tapa recortando cuadrados del mismo tamaño en las esquinas de una hoja de 20x40 cm, de forma tal que el volumen sea máximo.

Materiales:

- Dos hojas de papel de 20x40 cm.
- Tijeras y cinta.
- Calculadora.
- Lápiz.
- Cuaderno.
- Regla.

Condiciones

- La actividad es individual
- Se debe permanecer en silencio hasta la etapa 3

Desarrollo:

Etapa 1 (2 min)

1. Trace líneas punteadas que se encuentren a la misma distancia de los lados de la hoja, estas formarán cuadrados en sus extremos, recórtelos.

Etapa 2 (2min)

1. Doble las pestañas de papel en la misma dirección sobre las líneas punteadas, mida el largo, ancho y alto de la caja formada.

Etapa 3 (7 min)

2. Calcule el volumen de la caja con los datos obtenidos y compare sus resultados con 5 compañeros complete la tabla de datos

	Largo (cm)	**Ancho (cm)**	**Alto (cm)**	**Volumen (cm^3)**
Tu				
Compañero 1				
Compañero 2				
Compañero 3				
Compañero 4				
Compañero 5				
Compañero 6				
Compañero 7				
Compañero 8				
Compañero 9				
Compañero 10				

3. Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta.

¿Las medidas de tu caja son iguales a las de tus compañeros?

¿Quién obtuvo el mayor volumen?

¿De qué depende el tamaño de la caja?

¿crees que hay un valor en el cual el volumen sea el mayor de todos los posibles (máximo)?

¿Cuáles son de las posibles medidas que se pueden recortar, el mínimo y el máximo?

Etapa 4 (10 min)

Grafique las parejas formadas por la altura y el volumen que aparecen en la tabla, utilice la escala dada.

Etapa 5 (30 min)

1. Establezca relaciones entre las variables para reducir la cantidad y generar una función.

2. Realice un esquema gráfico de la caja, asignando variables y escriba una **expresión algebraica** que relacione la altura y el volumen de la caja.

Etapa 6 (30 min)

1. Calcule los valores de la tabla de datos con el modelo matemático (función) y compárelos con los de la tabla anterior; utilice los mismos valores para las alturas. Si no son iguales explique porque cree que varían

Nota: Utilizar calculadora y tres decimales en cada respuesta.

	Alto (cm)	Volumen (cm^3)
Tu		
Compañero 1		
Compañero 2		
Compañero 3		
Compañero 4		
Compañero 5		
Compañero 6		
Compañero 7		
Compañero 8		
Compañero 9		
Compañero 10		

2. Grafique las parejas ordenadas altura, volumen de la tabla en el plano cartesiano anterior con otro color y compare.

3. Utilice la tabla y la calculadora para encontrar el volumen máximo.

4. Construya la caja de volumen máximo.

ACTIVIDAD 10 “Construcción cono”

Objetivos:

- Reconocer las reglas de representación de sistema grafico como escala, par ordenado, variables, unidades. (Tratamiento)
- Construye graficas a partir de tablas de datos. (conversión T-G)
- Tabula la información presentada en un gráfico (conversión g-T)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una gráfica. (conversión G-A)
- Modela mediante una función la relación entre dos variables, partiendo de una tabla de datos. (conversión T-A)
- Evalúa funciones en valores específicos. (conversión A-T-G)
- Identifica la relación de dependencia entre variables. (Tratamiento)
- Reconoce y aplica las matemáticas en diferentes contextos

Materiales:

- Dos círculos de cartulina de radio 10 cm recortados.
- Tijeras.
- Transportador.
- Hojas de examen
- Lápiz.

Etapa 1 (5 min)

1. Mida un ángulo central en la circunferencia Recortar un sector de la circunferencia (ángulo central) como indica la figura y mida el ángulo de la sección retirada.

2. Una los extremos de la figura y forme un cono.

Etapa 2 (10 min)

1. Mida el diámetro de la base, la altura del cono y calcule su volumen, tome la información de 10 compañeros en la tabla adjunta.

	Angulo cortado °	**Diámetro de la base del cono (cm)**	**Altura del cono(cm)**	**Volumen (cm^3)**
Tu				
Compañero 1				
Compañero 2				
Compañero 3				
Compañero 4				
Compañero 5				
Compañero 6				
Compañero 7				
Compañero 8				
Compañero 9				
Compañero 10				

4. Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta.

¿La medida del ángulo que cortaste es iguale a la de tus compañeros?

¿Las medidas de tu cono son iguales a las de tus compañeros?
¿Quién obtuvo el mayor volumen?
¿De qué depende el tamaño del cono?
¿crees que hay un valor en el cual el volumen sea el mayor de todos los posibles (máximo)?
¿Cuáles son de las posibles medidas del ángulo que se pueden recortar, el mínimo y el máximo y que se pueda formar el cono?

Etapa 4 (10 min)

1. Grafique las parejas formadas por el ángulo y el volumen que aparecen en la tabla, utilice la escala dada.

2. Grafique las parejas formadas por el diámetro y el volumen que aparecen en la tabla, utilice la escala dada.

Etapa 5 (10 min)

Establezca una relación entre la altura del cono y el diámetro para reducirlas y generar una expresión algebraica (función) que represente el volumen del cono en función de su altura h.

Etapa 6 (30 min)

1. Calcule los valores de la tabla de datos con el modelo matemático (función) y compárelos con los de la tabla anterior; utilice los mismos valores para los diámetros. Si no son iguales explique porque cree que varían

Nota: Utilizar calculadora y tres decimales en cada respuesta.

	Altura (cm)	Volumen (cm^3)
Tu		
Compañero 1		
Compañero 2		
Compañero 3		
Compañero 4		
Compañero 5		
Compañero 6		
Compañero 7		
Compañero 8		
Compañero 9		
Compañero 10		

2. Grafique las parejas ordenadas altura, volumen de la tabla en el plano cartesiano anterior con otro color y compare.

3. Utilice la tabla y la calculadora para encontrar el volumen máximo.

4. Construya el cono de volumen máximo.

ACTIVIDAD 8

Estados de la materia.

Etapa 1 (15 min)

Lea el siguiente articulo referente a la materia, sus manifestaciones y cambios de estado. Elabore un mapa conceptual.

Diagrama de fases

Etapa 3 (5 min)